Konstrukce elipsy

MARIE CHODOROVÁ – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

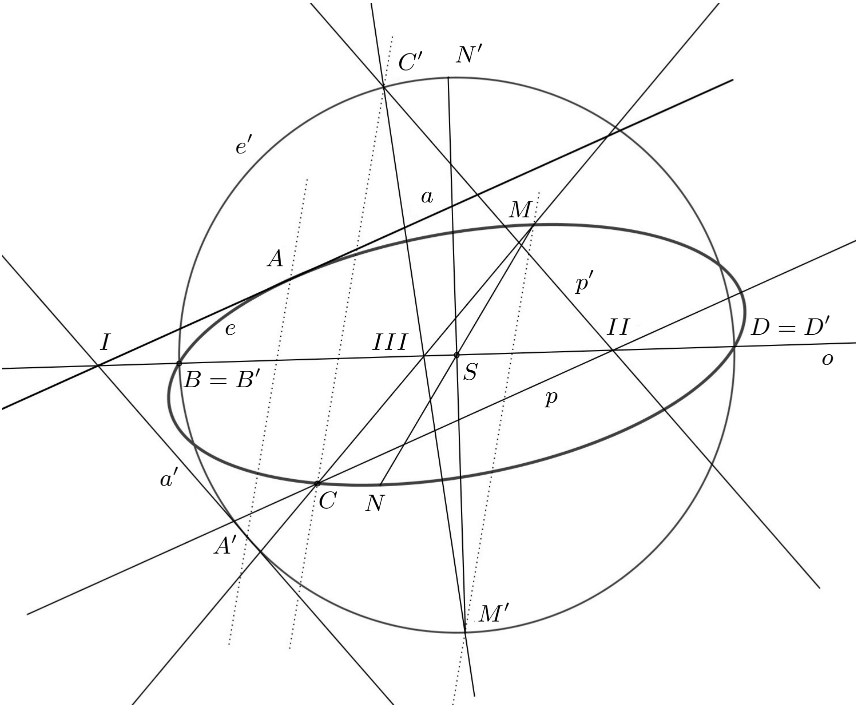
Kuželosečky představují ve výuce matematiky zajímavé téma, avšak na střední škole bývají často opomíjené nebo se s nimi studenti seznámí jen stručně v analytické geometrii a o jejich vlastních konstrukcích se ve výuce příliš nedozví, přitom lze konstatovat, že mají díky svým ohniskovým vlastnostem i praktické využití v běžném životě.

Na kuželosečkách lze mj. prezentovat množství zajímavých konstrukcí. V dalším textu se zaměříme výhradně na elipsu, kterou lze konstruovat pomocí ohniskových vlastností nebo jako řezy na rotační válcové ploše, kde využíváme tzv. *afinity mezi kružnicí a elipsou.* (Kružnice i elipsa jsou jistými řezy rotační válcové plochy a afinita mezi nimi je dána osou afinity, což je průsečnice rovin řezu, a odpovídají si body kružnice a elipsy ležící na téže povrchové přímce.) Pro tento článek jsme zvolili jednu typickou úlohu na konstrukci elipsy, kterou lze provést dvojím způsobem, a to buď využitím osové afinity mezi kružnicí a elipsou, nebo její konstrukci lze odvodit z prostoru, kdy hledaná elipsa bude průmětem řezu válce (samozřejmě při vhodném zvolení válce vzhledem k průmětně v prostoru). Uvažujeme takovou polohu roviny, aby řezem válce byla elipsa.

Úloha

Sestrojte elipsu, je-li dána její tečna a, střed S a její body B, C, které nejsou s bodem S kolineární.

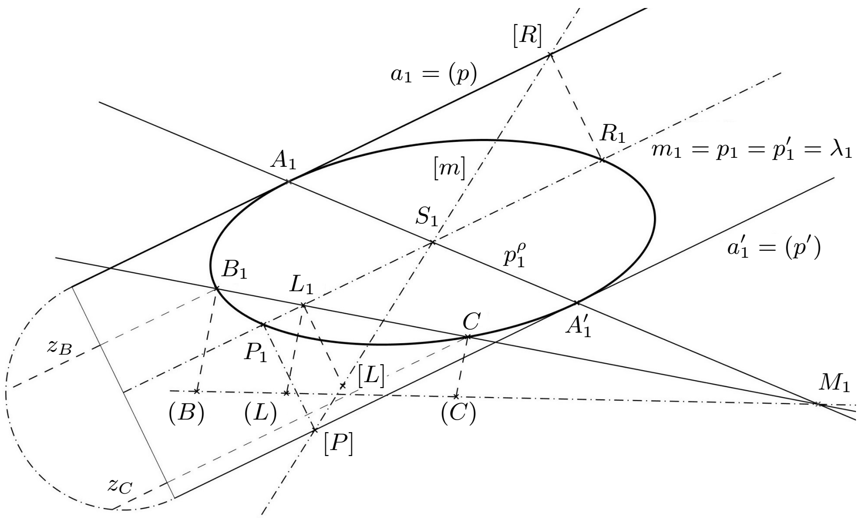
Řešení (užitím tzv. osové afinity, obr. 1). Hledanou elipsu e sestrojíme jako afinní obraz kružnice e' ve vhodně zvolené osové afintitě. Vzhledem k tomu, že je dán střed hledané elipsy e a dva její body, zvolíme osu afinity tak, aby procházela středem S a například bodem B, tedy $o = SB$. Body S a B jsou *samodružné* a můžeme sestrojit kružnici $e'(S; |SB|)$, která je afinním obrazem elipsy e. Osu afinity jsme zvolili, kdežto směr afinity je nutno určit ze zbývajících prvků. Tečna a elipsy e se zobrazí na tečnu a' kružnice e' a současně a' musí procházet bodem $\{I\} = a \cap o$, a' sestrojíme jako tečnu kružnice e' procházející bodem I (jako obraz přímky a zvolíme jednu z tečen).



Obr. 1

Uvažujme přímku $p \parallel a$ procházející bodem C. V osové afinitě se dvojice rovnoběžných přímek zobrazí opět na dvojici rovnoběžných přímek, proto také $p' \parallel a'$. Obraz C' leží na p' i na e', tedy $C' = p' \cap e$ (opět zvolíme libovolně jeden z průsečíků). Označíme-li D druhý průsečík osy afinity s kružnicí e', je BD samodružný průměr elipsy e. Průměr $M'N'$ kružnice e' kolmý na BD se zobrazí na průměr MN elipsy e sdružený s průměrem BD, elipsa e je sdruženými průměry jednoznačně určena.

Jiné řešení (užitím prostorových konstrukcí, obr. 2). Druhý způsob řešení je založen na prostorových konstrukcích, hledanou elipsu sestrojíme jako pravoúhlý průmět řezu jisté rotační válcové plochy. Konstrukce provádíme v kótovaném promítání, jehož průmětna je dána přímkou a a bodem S. Uvažujme rotační válcovou plochu, jejíž povrchová přímka je a a osa o rotace prochází bodem S. K tomu, abychom vyjádřili, že na každý daný prvek pohlížíme jako na kolmý průmět bodu nebo přímky do průmětny π, připojíme předem v dané úloze ke každému zadanému prvku index 1. Sestrojíme přímku a'_1, která je souměrná s a_1 podle S_1. Tyto přímky jsou průměty obrysových přímek a, a' rotační válcové plochy s osou o ležící v průmětně π. Body B_1, C_1 jsou pravoúhlé průměty bodů B, C této válcové plochy. Bod S_1 je pravoúhlým průmětem středu S jisté elipsy e, která je řezem válcové plochy rovinou σ. Rovina σ je jednoznačně určena body B, C, S. Podle známé Quételetovy–Dandelinovy věty bude řezem elipsa e, jejímž pravoúhlým průmětem bude elipsa e_1, kterou zobrazíme pomocí sdružených průměrů. Stopa rovina σ prochází bodem S a dále bodem M, což je stopník přímky BC, který určíme sklopením promítací roviny této přímky.[1] V průmětně leží půdorysná stopa p^σ roviny σ a povrchové přímky a, a' dané rotační válcové plochy. Jeden průměr elipsy řezu bude tedy ležet na p^σ, omezen bude body A, A', kde $\{A\} = a \cap p^\sigma$, $\{A'\} = a' \cap p^\sigma$. Tento průměr je průměrem řezu a současně i průměrem průmětu řezu.



Obr. 2

Víme, že dva průměry elipsy jsou sdružené, právě když tečny v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem. Přímky a,

[1] Kóty bodů B, C lze snadno zjistit z předpokladu, že body B, C leží na dané rotační válcové ploše. Řešení závisí na tom, zda leží oba v téže polorovině určené průmětnou, nebo v polorovinách opačných.

a' jsou skutečným obrysem, resp. jejich průměty a_1, a'_1 zdánlivým obrysem, rotační válcové plochy, jsou tedy tečnami elipsy řezu, resp. tečnami průmětu elipsy řezu. Hledáme průměr PQ rovnoběžný s přímkami a, a'. Průměr PQ bude ležet v rovině λ, která obsahuje osu válcové plochy o a je kolmá k průmětně π, tedy jejím průmětem je přímka. Rovina λ protíná danou válcovou plochu ve dvou povrchových přímkách p, p' a rovinu řezu σ v přímce m. Krajní body průměru P, Q určíme jako průsečíky přímky m s povrchovými přímkami p, p'. Rovina λ je kolmá k průmětně, sklopíme ji a ve sklopení určíme hledané body P, Q. Po sklopení roviny λ sklopené přímky p, p' splynou s prvními průměty přímek a, a'. Přímku m sklopíme pomocí bodu $L = m \cap BC$. Určíme sklopené body (P), (Q), $(P) = (m) \cap (p)$, $(Q) = (m) \cap (p')$. Body P_1, Q_1 leží na m_1 a P_1Q_1 je obrazem průměru PQ. Průmět řezu je určen průměty sdružených průměrů $A_1A'_1$ a P_1Q_1.

Diskusi lze také jednoduše provést pomocí prostorových úvah.

Diskuse:

a) Body B_1, C_1 jsou vnitřní body pásu a_1, a'_1, pak body $B, C \notin \pi$ a úloha má dvě řešení. Totiž body B, C, S mohou mít vzhledem k π čtyři polohy. Ze souměrnosti podle π dávají vždy dva případy jedno řešení. Na obr. 2 leží body B, C v téže polorovině určené průmětnou.

b) Je-li jeden z bodů B_1, C_1 vnitřním bodem pásu a_1, a'_1 a druhý leží na a'_1, má úloha jen jedno řešení.

c) Leží-li oba body B_1, C_1 na a'_1, nebo B_1 leží na a_1 a C_1 leží na a'_1,[2] nebo je-li jeden z bodů B_1, C_1 vnějším bodem pásu a_1, a'_1, pak úloha nemá žádné řešení.

Literatura

[1] *Šimek, J.*: O některých konstrukcích elipsy odvozených z prostoru. Sborník VŠP v Olomouci, Přírodní vědy IV, Matematika – Fysika – Chemie, SPN, Praha, 1958, 19–28.

[2] *Havlíček, K.*: Úvod do projektivní geometrie kuželoseček. SNTL, Praha, 1956.

[2] *Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounovský, J.*: Deskriptivní geometrie II, ČSAV, Praha, 1954.

[2] Body B_1, C_1, S_1 jsou nekolineární.