# Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

**Úloha 221**

Najděte všechny dvojice číslic $X$, $Y$ desítkové soustavy takové, že pro čísla $a, b, c, d$ ve tvaru

$$a = \overline{2X83}, \quad b = \overline{19Y6}, \quad c = \overline{29X6}, \quad d = \overline{1Y54}$$

jsou obě čísla $a + b$, $c - d$ dělitelná třemi.

*Stanislav Trávníček*

**Úloha 222**

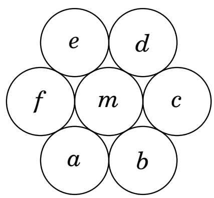
Je dána kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a bod $S_3$ jejího vnějšku. Sestrojte kružnice $k_2(S_2; r_2)$ a $k_3(S_3; r_3)$ tak, že současně platí: $S_2$ je bodem úsečky $S_1S_3$, kružnice $k_2$ se vně dotýká kružnic $k_1$ a $k_3$ a všechny tři kružnice mají společnou vnější tečnu.

*Šárka Gergelitsová*

Dále uvádíme řešení úloh 217 a 218, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle loňského (24.) ročníku našeho časopisu.

**Úloha 217**

Kruh na obrázku je obklopen šesti dotýkajícími se shodnými kruhy. V těchto kruzích jsou zapsána reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ a $m$. Přitom číslo v každém kruhu je součinem všech čísel v kruzích, které se jej dotýkají. Určete všechny možné hodnoty čísla $m$.




*Robert Geretschläger (Graz)*

*Řešení.* Pokud je v některém kruhu napsáno číslo 0, potom $m = 0$ spolu se zbývajícími čísly. Předpokládejme dále, že ve všech kruzích jsou nenulová reálná čísla.

Podle zadání platí

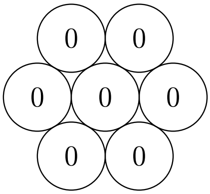
$$a = fmb, \quad b = amc, \quad d = cme, \quad e = dmf, \quad f = ema.$$

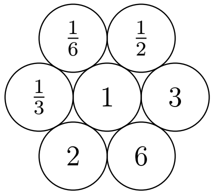
Vynásobením těchto šesti rovnic dostaneme

$$abcdef = (abcdef)^2 m^6.$$

Protože dále platí $m = abcdef$, dostáváme odtud $m = m^8$. Vzhledem k předpokladu $m \neq 0$ odtud plyne $m = 1$.

V závěru ještě musíme ukázat, že pro vypočtená $m$ z množiny $\{0; 1\}$ existují reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ daných vlastností. Jsou to například čísla z následujících obrázků.




Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich. *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Jan Gocník*, *Marian Poljak* a *Jan Šuta*, všichni z GJŠ v Přerově, *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Ivana Krumlová*, *Petr Zelina*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni, *Jakub Matěna* z G v Praze 9, Českolipská, *Jan Petr* z GJK v Praze 6 a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Tomáš Domes* z MG v Opavě, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Tomáš Konečný* z GJVJ v Českých Budějovicích, *Daniel Kopf* z SG v Opavě, *Tran Anh Minh* a *Jan Šorm*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Ester Sgalová* z GChD v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8 a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

## Úloha 218

Najděte všechny dvojice $(x, y)$ celých čísel vyhovujících rovnici

$$x^2 - 3x - 4xy - 2y + 4y^2 + 4 = 0.$$

*Pavel Calábek*

*Řešení.* Danou rovnici upravíme do tvaru

$$(x-2y)^2 = 3x + 2y - 4.$$

Protože $x$ a $y$ jsou celá čísla, existuje celé číslo $d$ tak, že platí

$$\begin{aligned} x - 2y &= d, \\ 3x + 2y - 4 &= d^2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy vzhledem k neznámým $x$, $y$ a parametru $d$ dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{d(d+1)+4}{4}, \\ y &= \frac{d(d-3)+4}{8}. \end{aligned}$$

V čitatelích výrazů pro $x$ a $y$ vpravo jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty, které mají stejné zbytky při dělení 8 pro každou dvojici $d$ a $d+8$. Vyzkoušením všech osmi možných zbytkových tříd při dělení 8 zjistíme, že $x$ a $y$ nabývají celočíselné hodnoty pouze pro celá čísla $d$ tvarů $d = 8k+4$ a $d = 8k-1$, kde $k$ je libovolné celé číslo. V prvním případě tak dostaneme

$$x = 16k^2 + 18k + 6, \quad y = 8k^2 + 5k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

ve druhém

$$x = 16k^2 - 2k + 1, \quad y = 8k^2 - 5k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Všechna celá čísla $x$ a $y$ vyhovující zadané rovnici jsou některého z tvarů (1) nebo (2).

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni. *Jakub Matěna* z G v Praze 9, Českolipská, *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

Neúplné řešení zaslal *Jan Petr* z GJK v Praze 6.

*Pavel Calábek*