Tři netradiční oscilátory – konstruktivistický přístup k výuce fyziky

ČENĚK KODEJŠKA – GIORGIO DE NUNZIO

Gymnázium, Nový Bydžov – Università del Salento, Itálie

V rámci výzkumu různých koncepcí v teorii učení, jako jsou behaviorismus, kognitivismus, konstruktivismus a konektivismus jsme se zaměřili na konstruktivistické pojetí tří fyzikálních experimentů s netradičními oscilátory. Navázali jsme tak na předchozí práce, jejíž výsledky byly publikovány v [1], [2].

Naším cílem bylo navrhnout tři problémové úlohy z oblasti kmitů, které by studenti dokázali popsat diferenciální rovnicí. Dalším úkolem bylo najít řešení této rovnice, odvodit vztah pro vlastní frekvenci oscilátoru a navrhnout reálné provedení experimentu, kterým by dokázali ověřit příslušné teoretické vzorce. U každé úlohy byly stanoveny hypotézy o přesnosti daného měření, které pak byly na závěr každého experimentu diskutovány.

Dalším dlouhodobým cílem naší práce je porovnání experimentálních výsledků dosažených českými a italskými studenty. Zatímco provedení experimentů a ověření hypotéz již v ČR proběhlo, na italské Univerzitě v Salentu se experimentální provedení teprve připravuje.

Žákům byly předloženy následující problémové úlohy: kmity zatížené zkumavky v kapalině o hustotě ρ, kmity prstence o poloměru R zavěšeného na vodorovné tyči a kmity kapalinového sloupce v U-trubici. Žáci provedli nejprve teoretický rozbor působících sil na daný oscilátor, následně zformulovali lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, ze které odvodili vztah pro periodu netlumených kmitů.

V experimentálním provedení jsme pak na základě teoretických vzorců pro výpočet periody kmitů navrhli určení velikosti jiné veličiny než periody, abychom učinili měření atraktivnější. V případě zkumavky ponořené do kapaliny žáci určovali z periody kmitů hustotu kapaliny, u kmitů prstence počítali poloměr prstence a vlastní moment setrvačnosti prstence, který porovnávali s teoreticky vypočítanou hodnotou $J_0 = mR^2$ a u oscilací vodního sloupce v U-trubici určovali koeficient tlumení, logaritmický dekrement útlumu a porovnávali vlastní periodu netlumených kmitů s periodou tlumených kmitů.

V posledním zmíněném experimentu si povšimli skutečnosti, že z čistě matematického pohledu se nejedná o periodu, protože průběh funkce se díky klesající amplitudě neopakuje a jedná se tedy v případě tlumených kmitů o kvaziperiodický pohyb.

V další části práce popíšeme nejprve teoretický základ pro kmity tří netradičních oscilátorů, a pak se budeme zabývat experimentálním provedením, k jehož realizaci jsme opět použili zvukovou kartu PC a optickou bránu sestavenou z laserového ukazovátka a solárního článku. Zvýšenou pozornost jsme věnovali také výpočtu chyb měření, které potvrdilo či vyvrátilo některé naše hypotézy.

1. Odvození vztahů pro periodu kmitů zkumavky, prstence a kapaliny v U-trubici

Při odvození vztahů pro periodu příslušného oscilátoru můžeme vycházet z pohybové rovnice (1) zapsané v diferenciálním tvaru (2):

$$ma = F \tag{1}$$

$$my'' = F \tag{2}$$

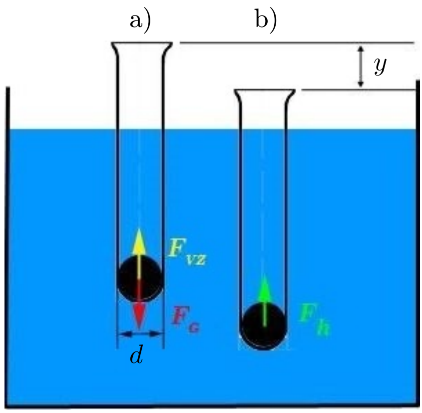
Prvním úkolem žáků bylo najít konkrétní tvar pro vyjádření síly na pravé straně rovnice tak, aby tato síla byla funkcí výchylky. Žáci si museli uvědomit, že síla $\boldsymbol{F}$, která je příčinou pohybu oscilátoru, vzniká teprve vychýlením oscilátoru z rovnovážné polohy. Pro zvýšení názornosti situace bylo z didaktického pohledu dobré nakreslit si příslušný oscilátor a zakreslit působící síly.

1.1. Kmity zkumavky v kapalině

Oscilátor je tvořen zkumavkou, která je ve své dolní části zatížena, aby v kapalině udržovala při kmitech pokud možno svislý směr. Situace je znázorněna na obr. 1. Pro jednoduchost jsme umístili těžiště soustavy zkumavka-kulička do středu kuličky uvnitř zkumavky. V situaci a) je zkumavka v rovnovážné poloze a tíhová síla F_G je v rovnováze se vztlakovou silou F_{vz}. Porušíme-li rovnováhu zatlačením zkumavky do kapaliny o délku y, začne působit proti pohybu zkumavky hydrostatická tlaková síla F_h. Ta je na obrázku 1b) znázorněna jako výsledná působící síla při puštění zkumavky. Velikost této síly je dána obecně známým vztahem (3):

$$F_\mathrm{h} = S\rho g y \tag{3}$$

kde S je průřez zkumavky, ρ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení a y je velikost výchylky zkumavky z rovnovážné polohy.



Obr. 1 Kmity zkumavky – rozbor sil

Rovnici (2) tak můžeme konkretizovat na tvar:

$$my'' = -S\rho g y \tag{4}$$

Znaménko mínus reflektuje skutečnost, že síla F_h působí proti výchylce y. Vydělíme-li rovnici hmotností a upravíme-li ji na lineární homogenní diferenciální rovnici, získáme rovnici netlumených kmitů:

$$y'' + \frac{S\rho g}{m} y = 0 \tag{5}$$

Vlastní frekvenci a periodu netlumených kmitů pak určíme ze vztahu

$$\omega_0^2 = \frac{S\rho g}{m} \tag{6}$$

jako

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho g S}{m}}, \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}, \tag{7}$$

kde m je hmotnost zkumavky včetně kuličky uvnitř zkumavky a pro ostatní veličiny platí, co bylo uvedeno výše ve vztahu (3).

Ze vztahů (7) pak můžeme vyjádřit vztah pro hustotu kapaliny (8), který budeme používat v experimentální části:

$$\rho = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \frac{m}{gS} \tag{8}$$

Pro úplnost uvedeme také tvar diferenciální rovnice, pokud budeme uvažovat tlumení,

$$y'' + 2by' + \frac{S\rho g}{m} y = 0, \tag{9}$$

kde b je konstanta útlumu, pro kterou platí

$$\delta = bT = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}. \tag{10}$$

V tomto vztahu představuje T periodu tlumených kmitů, A_n a A_{n+1} jsou dvě po sobě jdoucí amplitudy výchylky a δ je tzv. *logaritmický dekrement útlumu.* Vztah (10) budeme používat v experimentu s kmity vodního sloupce v U-trubici.

1.2. Kmity kapalinového sloupce v U-trubici

Kapalina uzavřená v U-trubici o vnitřním průměru d může kmitat, pokud kapalinový sloupec délky l vychýlíme z rovnovážné polohy o výchylku y (obr. 2).

K odvození diferenciální rovnice kmitů můžeme vyjít opět z obecného vztahu (2), do kterého dosadíme na pravé straně rovnice sílu, která způsobí kmity sloupce. Touto výslednou silou je stejně jako u obyčejného kyvadla tíhová síla F_G, pro jejíž velikost můžeme odvodit vztah:

$$F_\mathrm{G} = mg = V\rho g = 2yS\rho g \tag{11}$$

Analogicky s rovnicemi (4) a (5) můžeme zformulovat diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{2g}{l} y = 0, \tag{12}$$

ze které můžeme určit frekvenci a periodu netlumených kmitů

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}, \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}. \tag{13}$$

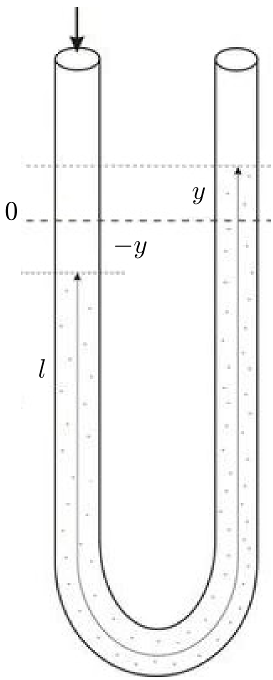
Protože jsou kmity kapalinového sloupce výrazně tlumené, můžeme v souladu s řešením rovnice (9) najít vztah pro periodu tlumených kmitů [3]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} - b^2}}, \tag{14}$$

kde T_0 je perioda netlumených kmitů a b je koeficient útlumu definovaný vztahem (10). Vztah (14) můžeme upravit do matematicky přehlednější podoby

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{\omega_0}\right)^2}}. \tag{15}$$

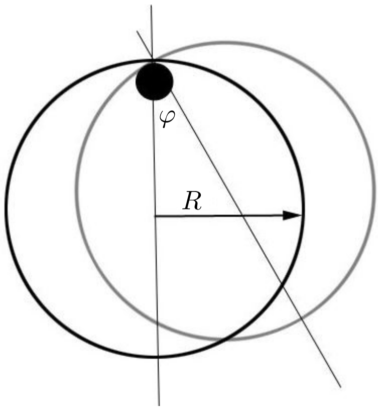
Toto vyjádření pak využijeme v experimentální části k porovnání naměřené periody tlumených kmitů s teoreticky vypočítanou.



Obr. 2 Kapalina v U-trubici – znázornění výchylky [3]

1.3. Kmity tenkého prstence zavěšeného na vodorovné tyči

Prstenec o poloměru R je zavěšen na vodorovné tyči, jejíž poloměr můžeme vůči poloměru prstence zanedbat. Situace je znázorněna na obr. 3.



Obr. 3 Kmity prstence zavěšeného na vodorovné tyči

Prstenec (tenká obruč) zavěšený na vodorovné tyči představuje fyzické kyvadlo. Zde zavádíme místo výchylky y úhlovou výchylku φ, pro kterou můžeme na základě pohybové rovnice otáčivého pohybu zformulovat rovnici (16) analogickou vztahu (4), viz [4]:

$$J\varphi'' = -mgd \sin\varphi \doteq -mgd\varphi = -D\varphi \tag{16}$$

Vztah (16) pak můžeme upravit na klasický tvar diferenciální rovnice

$$\varphi'' + \frac{D}{J}\varphi = 0, \tag{17}$$

kde $J = J_0 + md^2$ je moment setrvačnosti fyzického kyvadla (prstence) vzhledem k ose otáčení neprocházející těžištěm tělesa, $D = mgd$ je tzv. direkční moment kyvadla, m je hmotnost kyvadla, d je vzdálenost osy otáčení od těžiště kyvadla a J_0 je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm tělesa. Pro tenký prstenec platí pro J_0 vztah:

$$J_0 = mR^2 \tag{18}$$

Z rovnice (17) pak můžeme určit vztahy pro vlastní frekvenci a periodu kyvadla

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{J_0 + md^2}},\\
T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + md^2}{mgd}},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

které můžeme v případě prstence, u kterého platí $d = R$, zredukovat na tvar

$$
f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2R}}, \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \tag{20}
$$

Rovnice (19) a (20) využijeme v experimentální části k výpočtu poloměru prstence R a momentu setrvačnosti J_0. Tyto experimentálně zjištěné hodnoty pak budeme porovnávat s klasickým měřením poloměru prstence pomocí posuvného měřidla a teoretickým výpočtem J_0 ze vztahu (18).

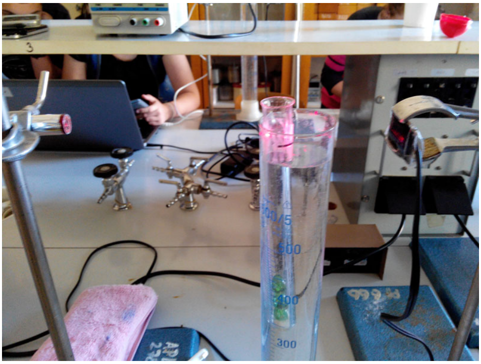
2. Určení hustoty kapaliny z kmitů zkumavky

Jak bylo vysvětleno v části 1.1, koná zkumavka ponořená do kapaliny, pokud ji vychýlíme z rovnovážné polohy, kmitavý pohyb. Úkolem studentů bylo zrealizovat a zoptimalizovat podmínky pohybu zkumavky v kapalině, která je velmi nestabilní.

Po několika neúspěšných pokusech se zkumavkou, na jejíž dno jsme umístili do vaty nejprve kovovou kuličku a poté rybářská olůvka, jsme nedokázali stabilizovat pohyb zkumavky. Zatížení bylo rozloženo nerovnoměrně a zkumavka se při kmitavém pohybu kymácela ze strany na stranu, což se negativně projevilo v zaznamenaném oscilogramu. Délka zkumavky pak při zatížení olůvky způsobila příliš velký ponor, který neumožnil udělit oscilátoru výchylku větší než 1 cm. Při výchylce menší než tato hodnota jsou kmity tak rychle utlumené, že je téměř nelze zaznamenat.

Hledali jsme tedy jiné řešení, jak zkumavku stabilizovat. Toto řešení je zobrazeno na obr. 4. Zátěž jsme zrealizovali ze tří skleněných kuliček, jejichž průměr téměř přesně odpovídal vnitřnímu průměru zkumavky. Takto upravená zkumavka zachovává při správném rozkmitání svislý směr a její ponor umožňuje bez problémů zrealizovat měření. Kuličky lze za pár korun koupit v obchodě s hračkami.

Námi stanovená hypotéza i přesto byla, že se nám nepodaří změřit hustotu kapaliny tímto způsobem s relativní chybou menší než 10 %, a že se tedy v tomto případě jedná o pouhý myšlenkový experiment, který je nevhodný k experimentálnímu určení hustoty kapaliny.



Obr. 4 Experimentální uspořádání kmitů zkumavky

Horní konec zkumavky jsme opatřili tenkým černým proužkem, který jsme pomocí izolepy připevnili ke zkumavce. Proužek by měl být dlouhý pouze do poloviny obvodu zkumavky, protože pokud ho uděláme po celém obvodu, vznikají na oscilogramu při kmitech vlivem nestability zkumavky stínové záznamy přerušení laserového paprsku.

Je-li zkumavka, ponořená do kapaliny v odměrném válci, v rovnovážné poloze, zaměříme laserový paprsek na černý proužek. My jsme použili po několika různých variantách odměrných válců, kádinek a baněk odměrný válec o objemu 500 ml. Tento válec je dostatečně vysoký, aby zkumavka mohla volně kmitat (běžná kádinka toto díky malé hloubce neumožňuje) a jeho vnitřní průměr je dostatečně velký na to, aby při kmitech nedocházelo ke kontaktu zkumavky a válce (což se děje u menších odměrných válců).

Před vlastním měřením periody je třeba ještě určit hmotnost m zkumavky se zátěží, k čemuž jsme použili digitální váhy s přesností na desetinu gramu. Průměr zkumavky d jsme určili posuvným měřidlem a pomocí něj jsme vypočítali průřez $S = \pi r^2$, kde $r = d/2$.

Periodu kmitů jsme zaznamenávali v programu Free Audio Editor (FAE), který jsme již dostatečně popsali v [1] a [2]. Z periody jsme podle vztahu (8) vypočítali hustotu kapaliny. Měření jsme provedli pro vodu a líh. Navzdory původnímu předpokladu, že výsledky budou hodně nepřesné, jsme byli mile překvapeni dosaženou přesností.

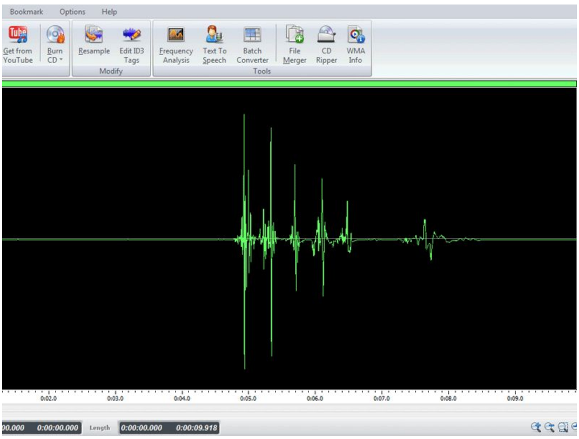
Naměřené hodnoty pro vodu jsou uvedeny v tabulce 1. Zkumavka měla vždy průměr $d = 18 \cdot 10^{-3}$ m, její průřez byl tedy $S = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ m^2.

Hmotnost zkumavky se lišila podle hmotnosti použitých kuliček a tlumicí vaty na dně zkumavky. Tíhové zrychlení jsme volili $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Tabulka 1 Určení hustoty vody z periody kmitů zkumavky

Č. měř.	$\frac{m}{10^{-3}\ \mathrm{kg}}$	$\frac{T_0}{\mathrm{s}}$	$\frac{\rho}{\mathrm{kg \cdot m^{-3}}}$	$\frac{\Delta m}{10^{-3}\ \mathrm{kg}}$	$\frac{\Delta T_0}{\mathrm{s}}$	$\frac{\Delta \rho}{\mathrm{kg \cdot m^{-3}}}$
1	34,4	0,737	1001	0,58	0,0014	21
2	34,4	0,721	1046	0,58	0,0146	60
3	34,4	0,723	1040	0,58	0,0126	54
4	35,1	0,735	1027	0,12	0,0006	5
5	35,6	0,744	1017	0,62	0,0084	41
6	35,6	0,739	1030	0,62	0,0034	27
7	35,5	0,740	1025	0,52	0,0044	27
8	35,5	0,741	1022	0,52	0,0054	30
9	34,3	0,737	998	0,68	0,0014	24
10	35,0	0,739	1013	0,02	0,0034	10

Kmity zkumavky jsou velice rychle utlumené, zkumavku je třeba vychýlit o cca 2 cm, aby došlo alespoň ke čtyřem kmitům přes laserový paprsek. Oscilogram kmitů je na obr. 5.



Obr. 5 Oscilogram kmitů zkumavky

Absolutní chybu v určení hustoty můžeme vypočítat pro každý řádek tabulky 1 vztahu

$$\Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{2\Delta T_0}{T_0}\right), \tag{21}$$

který lze za předpokladu přesného určení průřezu zjednodušit na vztah (22)

$$\Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta T_0}{T_0}\right). \tag{22}$$

Průměrná hodnota hmotnosti byla určena pomocí statistické analýzy v programu MS Excel z naměřených hodnot jako $m = (0{,}035\,0 \pm 0{,}000\,2)$ kg a průměrná hodnota periody $T_0 = (0{,}736 \pm 0{,}002)$ s.

Průměrná hodnota hustoty vody určená ze všech měření má velikost $\rho = (1\,020 \pm 30)\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Relativní chyba měření je $\delta\rho = 0{,}029\,4 \doteq 3$ %, což je v dobrém souladu s měřením realizovaným ve školní laboratoři. I nalezená hodnota průměrné hustoty vody poměrně dobře koresponduje s tabulkovou hodnotou $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ při 20 °C.

Hypotéza, že relativní chyba měření bude větší než 10 %, se nepotvrdila, a k našemu překvapení lze konstatovat, že můžeme tímto způsobem v podmínkách školního laboratorního cvičení měřit hustotu kapaliny s dostatečnou přesností. Přesto i toto měření je závislé na velké pečlivosti při jeho realizaci, zejména při puštění zkumavky ve svislém směru tak, aby se při pohybu nerozkývala ze strany na stranu. Zde se osvědčil nejprve přípravný dvouhodinový nácvik, kdy studenti prováděli cvičné měření a učili se správně rozkmitat zkumavku, a poté proběhlo teprve při dalším laboratorním cvičení řádné měření.

(Pokračování)

Literatura

[1] *Kodejška, Č.*: Tři nové fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC. MFI, 24 (2015), s. 109–123.

[2] *Kodejška, Č. a kol.*: Fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC. MFI, 22 (2013), s. 343–350.

[3] *Tesař, J., Bartoš, P.*: Kmitavý pohyb trochu jinak. [online]. [cit. 03. 05. 2015] Dostupné z: http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/13-31-Tesar.html.

[4] *Šedivý, P. a kol.*: Harmonické kmity mechanických soustav. Knihovnička Fyzikální olympiády č. 44, MAFY, Hradec Králové, 2000, s. 12–13.