ZPRÁVY

9. Středoevropská matematická olympiáda

Devátý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se konal ve dnech 25.–31. srpna 2015 ve slovinském Koperu. Soutěže se tradičně účastní Rakousko, Chorvatsko, Česká republika, Německo, Maďarsko, Litva, Polsko, Slovensko, Slovinsko, Švýcarsko – celkem 60 soutěžících z 10 zemí.

Český tým byl sestaven z těchto žáků: *Filip Bialas* (6/8 G Opatov, Praha 4), *Vojtěch Lukeš* (7/8 G Luďka Pika, Plzeň), *Jan Petr* (6/8 G Jana Keplera, Praha 6), *Daniel Pišťák* (7/8 G Christiana Dopplera, Praha 5), *Lucien Šíma* (7/8 PORG, Praha 8), *Jan Šorm* (7/8 G Brno, třída Kapitána Jaroše 14). Vedoucími českého týmu byli *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*, z FIT ČVUT v Praze a *PhDr. Lucie Růžičková, Ph.D.*, z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze.

Vlastní soutěž se konala ve dvou dnech. První den proběhla na Pedagogické fakultě Univerzity na Primorskem v Koperu individuální soutěž, v níž žáci řešili po jedné úloze z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel. Druhý den se konala na jedné z koperských základních škol týmová soutěž, v níž každý tým řešil osm úloh, po dvou ze stejných oblastí jako v soutěži jednotlivců.

Kromě samotné soutěže se v době volna mohli žáci podívat do hlavního slovinského města Ljubljany a do krásného jeskynního komplexu Postojna.

Na závěr pobytu v Koperu se konalo slavnostní vyhlášení výsledků. V individuální soutěži bylo uděleno 6 zlatých, 9 stříbrných a 18 bronzových medailí. Jedním z držitelů zlaté medaile byl také náš *Filip Bialas*, který ztratil pouze jeden bod z maximálního součtu a se ziskem 31 bodů obsadil dělenou 3. příčku. *Jan Petr* a *Jan Šorm* byli oceněni čestným uznáním za úplné vyřešení jedné soutěžní úlohy. V týmové soutěži skončil český tým na 7. místě s celkovým ziskem 36 bodů.

Podrobnější informace mohou zájemci nalézt na oficiálních stránkách 9. MEMO (http://memo2015.dmfa.si).

Na závěr uvádíme texty všech soutěžních úloh. V závorce je uvedena země, která úlohu navrhla.

Soutěž jednotlivců
(27. srpna 2015)

Příklad I–1

Najděte všechny surjektivní funkce $f\colon \mathbb{N} \to N$ takové, že pro všechna kladná celá čísla a a b platí právě jedna z následujících rovností:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Poznámka. $\mathbb{N}$ označuje množinu všech kladných celých čísel. Funkci $f\colon X \to Y$ nazýváme surjektivní, jestliže pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.

Příklad I–2

Nechť $n \geq 3$ je celé číslo. *Vnitřní úhlopříčka jednoduchého n-úhelníku* je úhlopříčka, která celá leží v tomto n-úhelníku. Označme $D(P)$ počet všech vnitřních úhlopříček jednoduchého n-úhelníku P a označme $D(n)$ nejmenší možnou hodnotu $D(Q)$, kde Q je libovolný jednoduchý n-úhelník. Dokažte, že žádné dvě vnitřní úhlopříčky jednoduchého n-úhelníku P se neprotínají (případně se protínají pouze ve společném krajním bodě), právě tehdy když $D(P) = D(n)$.

Poznámka. Jednoduchý n-úhelník je mnohoúhelník s n vrcholy, který sám sebe neprotíná. Mnohoúhelník není nutně konvexní.

Příklad I–3

Nechť čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový. Nechť bod E je průsečíkem přímek rovnoběžných s AC a BD procházejících po řadě body B a A. Přímky EC a ED se protínají s kružnicí opsanou trojúhelníku AEB dále po řadě v bodech F a G. Dokažte, že body C, D, F a G leží na jedné kružnici.

Příklad I–4

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel $[m,n]$, pro která existují vzájemně nesoudělná celá čísla a a b větší než 1 taková, že

$$\frac{a^m+b^m}{a^n+b^n}$$

je celé číslo.

Soutěž družstev
(28. srpna 2015)

Příklad T–1

Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c taková, že $abc = 1$, platí následující nerovnost:

$$\frac{a}{2b+c^2}+\frac{b}{2c+a^2}+\frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Příklad T–2

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ takové, že

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

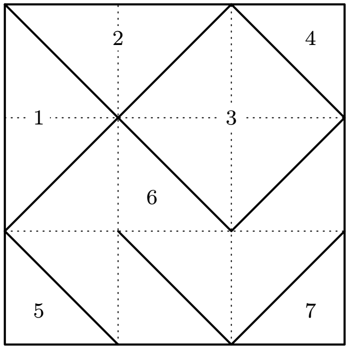
platí pro všechna nenulová reálná čísla x a y.

Příklad T–3

V řadě stojí n studentů na pozicích od 1 do n. Zatímco se učitel dívá jinam, někteří studenti změní své pozice. Když se učitel podívá zpět, studenti opět stojí v řadě. Jestliže student, který byl původně na pozici i, je teď na pozici j, řekneme, že se tento student přemístil o $|i-j|$ kroků. Určete největší možný součet kroků, kterého mohou všichni studenti dosáhnout.

Příklad T–4

Nechť N je kladné celé číslo. V každém z N^2 jednotkových čtverců tabulky $N \times N$ je zakreslena jedna z jeho dvou úhlopříček. Zakreslené úhlopříčky rozdělují tabulku $N \times N$ na K oblastí. Pro každé N určete nejmenší a největší možnou hodnotu K.



Příklad pro $N = 3$, $K = 7$

Příklad T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| > |AC|$. Dokažte, že existuje bod D s následující vlastností: jestliže dva různé body X a Y leží ve vnitřní oblasti trojúhelníku ABC tak, že body B, C, X a Y leží na jedné kružnici a platí

$$|\sphericalangle AXB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CYA| - |\sphericalangle CBA|,$$

pak přímka XY prochází bodem D.

Příklad T–6

Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, kde $|AB| > |AC|$, a nechť přímka AI protíná stranu BC v bodě D. Předpokládejme, že bod P leží na úsečce BC a platí $|PI| = |PD|$. Dále nechť bod J je obrazem bodu I v osové souměrnosti určené osou úsečky BC a nechť Q je další průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a APD. Dokažte, že

$$|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAJ|.$$

Příklad T–7

Najděte všechny uspořádané dvojice kladných celých čísel $[a, b]$ tak, že

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Příklad T–8

Nechť $n \geq 2$ je celé číslo. Určete počet kladných celých čísel m takových, že $m \leq n$ a $m^2 + 1$ je dělitelné číslem n.

Jaroslav Zhouf

Přehled předešlých ročníků MEMO:

8. MEMO – 2014: Dresden, Německo, http://memo2014.de

7. MEMO – 2013: Veszprém, Maďarsko, http://memo2013.mik.uni-pannon.hu

6. MEMO – 2012: Solothurn, Švýcarsko, http://www.imosuisse.ch/memo2012

5. MEMO – 2011: Varaždin, Chorvatsko, http://memo2011.math.hr

4. MEMO – 2010: Žilina, Slovensko, http://memo2010.skmo.sk

3. MEMO – 2009: Poznaň, Polsko, http://www.memo2009.wmi.amu.edu.pl

2. MEMO – 2008: Olomouc, ČR, http://kag.upol.cz/memo/

1. MEMO – 2007: Eisenstadt, Rakousko, http://www.oemo.at/en/info/memo.php

Tři dny s matematikou
(Ústí nad Orlicí 2015)

Ve dnech 4.–6. 11. 2015 proběhla na SŠ automobilní v Ústí nad Orlicí tradiční konference Tři dny s matematikou. Téměř sto učitelů matematiky středních odborných škol a učilišť zde vyslechlo přednášky a rozvinulo své didaktické schopnosti v dílnách.

Konferenci zahájil ředitel školy *Ing. Petr Vojtěch*, poté účastníky pozdravil *Mgr. Martin Kiss*, vedoucí odboru kultury a školství Pardubického kraje. Za organizátory vystoupili *Mgr. František Procházka* za Pardubickou pobočku JČMF a *Mgr. Aleš Odehnal*, zástupce ředitele školy a předseda organizačního výboru. Poté účastníci absolvovali některé z těchto pracovních dílen:

- Prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.: Jak počítali naši předkové,
- PaedDr. Josef Lindauer: Kombinatorika pro trojkaře,
- Jakub Stránský: Software Techambition,
- RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.: Geogebra.

Na večer byl připraven seznamovací program v jídelně školy.

Ve čtvrtek dopoledne probíhalo druhé kolo dílen:

- PaedDr. Josef Lindauer: Statistika – chyby, omyly, a klamné triky statistiky,
- Mgr. Vladimír Pančocha: Matematiku umím naučit i medvěda,
- Mgr. Martin Grygar, Ph.D.: Aktuálnost sporu o univerzálie a vědecké entity, projekce dokumentu o N. Bohrovi.

Odpoledne byly připraveny dvě přednášky:

- Doc. PaedDr. Petr Eisenmann CSc.: Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice,
- RNDr. Dag Hrubý: Rizika neoliberálního přístupu ke vzdělávání.

V závěru odpoledního programu informovali o testování 5. a 9. tříd ZŠ, přijímacích zkouškách na maturitní obory SŠ a státní maturitě a na dotazy odpověděli ředitel Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání *Ing. Jiří Zíka* a *PhDr. Eva Řídká, CSc.* a *Mgr. Dana Tomandlová.*

Účastníci společenského večera si pak vyslechli přednášku *doc. Arne Vrbského, M.M.* ze Zemědělské akademie Grünfeld, který přítomné seznámil se základními aplikacemi turbodidaktiky.

V pátek dopoledne následovalo poslední kolo dílen:

- Prof. RNDr. Jarmila Novotná CSc.: Charakteristika a ukázky dobrého vyučování,