Důkazy jedné trigonometrické identity

ŠEFKET ARSLANAGIĆ

Univerzita Sarajevo, BOSNA A HERCEGOVINA

V tomto příspěvku se seznámíme se třemi snadnými důkazy jedné známé trigonometrické identity, které se mj. hojně využívá např. při řešení soustav rovnic a nerovnic užitím goniometrických substitucí. Jedná se o následující rovnost:

V libovolném trojúhelníku ABC platí (při obvyklém označení velikostí jeho vnitřních úhlů)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1. \tag{1}$$

První dva níže uvedené důkazy této identity jsou ryze elementární, třetí se opírá o základy lineární algebry.

Důkaz 1. Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, je

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma.$$

Užitím známého vzorce pro kosinus součtu dvou argumentů plyne z poslední rovnosti po snadné úpravě

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta.$$

Umocněním obou stran poslední rovnosti na druhou a následnými úpravami pak dostaneme

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha\sin^2\beta =$$
$$= (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta) = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

Odtud po snadné úpravě bezprostředně obdržíme

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Tím je důkaz identity (1) proveden.

Důkaz 2. Nechť α, β, γ značí velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC. Ukážeme, že $\cos\alpha$ je reálným kořenem kvadratické rovnice

$$t^2 + (2\cos\beta\,\cos\gamma)\,t + (\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1) = 0 \tag{2}$$

o neznámé t a reálných parametrech $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Předně si uvědomme, že diskriminant D kvadratické rovnice (2) má hodnotu

$$\begin{aligned} D &= 4\cos^2\beta\,\cos^2\gamma - 4\,(\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1) = \\ &= 4\,(1-\cos^2\beta)(1-\cos^2\gamma) = 4\sin^2\beta\,\sin^2\gamma > 0, \end{aligned}$$

tedy rovnice (2) má dva navzájem různé reálné kořeny. Ukážeme, že jeden z kořenů této rovnice opravdu je $\cos\alpha$. Užitím známé formule pro nalezení kořenů kvadratické rovnice obdržíme po snadných úpravách

$$t_{1,2} = -\cos\beta\cos\gamma \pm \sin\beta\sin\gamma.$$

Pro

$$t = t_1 = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

(s použitím znaménka „+“) pak platí

$$t_1 = -\cos(\beta+\gamma) = -\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha.$$

Dosazením za $t = \cos\alpha$ v (2) dostaneme po snadné úpravě bezprostředně identitu (1), a důkaz je tak uzavřen.

Poznámka. Rovnice (2) má také druhý reálný kořen $t_2 = -\cos(\beta-\gamma)$, který jsme však k důkazu rovnosti (1) nevyužili.

Důkaz 3. Pro délky stran a, b, c a kosiny odpovídajících vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku ABC platí trojice vztahů

$$\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta, \\ b &= c\cos\alpha + a\cos\gamma, \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{aligned}$$

Ověření platnosti uvedené trojice rovností, které je snadné, přenecháváme čtenářům. Je zde nutno rozlišit případ ostroúhlého, pravoúhlého a tupoúhlého trojúhelníku ABC – tj. využít tzv. *úplné indukce.*

Délky stran a, b, c jsou tudíž (v tomto pořadí) nenulovými složkami řešení (x, y, z) homogenní soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých x, y, z ve tvaru

$$\begin{aligned} x - y\cos\gamma - y\cos\beta &= 0,\\ -x\cos\gamma + y - z\cos\alpha &= 0,\\ -x\cos\beta - y\cos\alpha + z &= 0. \end{aligned}$$

Tato homogenní soustava rovnic má však *netriviální* řešení (jehož složky nejsou všechny současně rovny 0), právě když její determinant je roven 0. Platí tudíž

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Výpočtem determinantu na levé straně vztahu (3), např. pomocí Sarrusova pravidla, obdržíme přímo kýženou identitu, a její třetí důkaz je tak ukončen.

Kromě uvedených tří snadných důkazů identity (1) existuje i řada dalších, které však nejsou tak přímočaré a matematicky elegantní, jako tři výše uvedené důkazy této identity.

(Z německého originálu zaslaného redakci časopisu Matematika–fyzika–informatika přeložil Jaroslav Švrček.)

Literatura

[1] *Arslanagić, Š.*: Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] *Andreescu, T. – Dospinescu, G. – Cirtoaje, V. – Lascu, M.*: Old and New Inequalities, Gil Publishing House, Zalau, 2004.

[3] *Mitrinović, D. S. – Pečarić, J. E. – Volenec, V.*: Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1989.