Kruhová inverze a její aplikace

NADĚŽDA GUSEVA – ANASTASIA IVAKINA – MARIE CHODOROVÁ

Moskevská státní pedagogická univerzita, RUSKÁ FEDERACE
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Kruhová inverze je zobrazení v rovině, pomocí něhož lze řešit především některé Apolloniovy úlohy, které nejsou řešitelné prostředky středoškolské matematiky, jimiž jsou shodná zobrazení, stejnolehlost a mocnost bodu ke kružnici. Nejprve uvedeme definici kruhové inverze a některé její důležité vlastnosti, poté užitím kruhové inverze vyřešíme dvě Apolloniovy úlohy. V první úloze, řešitelné mj. i pomocí mocnosti bodu ke kružnici, vysvětlíme hlavní myšlenku a výhodu kruhové inverze při řešení takových úloh. Druhá úloha není středoškolskými prostředky řešitelná, kruhová inverze je však jednou z metod, pomocí níž lze úlohu vyřešit.

Dále předpokládejme, že v rovině je dána kružnice k se středem O a poloměrem r.

Definice

Kruhovou inverzí v rovině nazýváme zobrazení roviny do téže roviny, které každému bodu M ($M \neq O$) přiřadí bod M' splňující následující podmínky

a) M' leží na polopřímce OM,

b) $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.

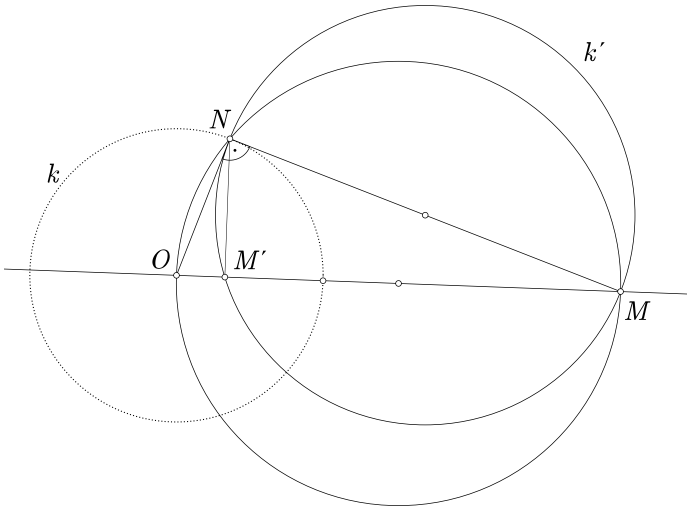
Kružnici $k(O; r)$ nazýváme *řídící*, resp. *základní*, kružnicí kruhové inverze. Bod O nazýváme *střed* kruhové inverze.

Poznámka. Snadno vidíme, že body M a M' jsou navzájem inverzní, tj. obrazem bodu M' je opět bod M. Body, které leží na řídící kružnici $k(O; r)$ kruhové inverze jsou tzv. *samodružné* body inverze, (tj. zobrazují se na sebe).

Vzhledem k výše uvedené definici kruhové inverze k bodu O neexistuje jeho obraz. V důsledku toho není kruhová inverze vzájemně jednoznačné zobrazení roviny na sebe. Abychom tento nedostatek odstranili, doplníme rovinu o tzv. *nevlastní* bod, který označíme ∞ a budeme jej považovat za obraz bodu O. Naopak obrazem nevlastního bodu ∞ je bod O. Rovina doplněná o nevlastní bod ∞ se nazývá *Möbiova.* V takovém případě je kruhová inverze bijektivní zobrazení Möbiovy roviny na sebe.

Z uvedené definice plyne, jak lze zkonstruovat v dané kruhové inverzi obraz M' bodu M (kromě středu O a nevlastního bodu ∞). K tomu použijeme Eukleidovu větu o odvěsně, tj. v pravoúhlém trojúhelníku ONM s přeponou OM platí $|ON|^2 = |OM| \cdot |OM'|$. Pokud bod M leží vně řídící kružnice (podobně jako na obr. 1), pak tímto bodem vedeme tečnu k řídící kružnici a bod M' leží na průsečíku kolmice vedené z bodu dotyku N ke spojnici OM. Platí tedy $|ON| = r$, a bod M' splňuje podle Eukleidovy věty o odvěsně podmínku b). Pokud bod M leží uvnitř řídící kružnice, uvedenou konstrukci provádíme obráceně, tj. z bodu M vedeme kolmici ke spojnici OM, v průsečíku N kolmice s řídící kružnicí sestrojíme její tečnu a obrazem M' je průsečík tečny a spojnice OM (obr. 1). Z této konstrukce je patrné, že body ležící vně řídící kružnice se zobrazí jako její vnitřní body a naopak.

Ověření podmínky b) lze provést rovněž využitím podobnosti trojúhelníků ONM a $OM'N$.



Obr. 1

Všimněme si, že úhel $NM'M$ je pravý. Pak body M a M' leží na kružnici k' sestrojené nad průměrem MN a kružnice k' protíná *ortogonálně* řídící kružnici k, tzn. že tečny sestrojené v jejich společném bodě jsou navzájem kolmé.

Navíc, jakákoliv kružnice, která je ortogonální k řídící kružnici k, procházející jedním z bodů M nebo inverzním M' musí procházet také druhým bodem. Skutečně, pokud vyjdeme z obr. 1, v němž kružnice k' protíná ortogonálně k řídící kružnici k kruhové inverze, pak podmínka b) vyjadřuje závislost mezi tečnou ON kružnice k' a úsečkami OM a OM', kde OM je průměr Thaletovy kružnice. V důsledku toho platí:

Věta 1

Je-li bod M různý od středu kruhové inverze O a neleží-li na řídící kružnici k, potom existuje jediný bod M' s vlastností, že pro všechny kružnice procházející bodem M, které jsou ortogonální k řídící kružnici k, je bod M' také bodem této kružnice.

Kruhová inverze má dále následující významné vlastnosti, které zde (stejně jako větu 1) dokazovat nebudeme. Důkazy těchto tvrzení je možno nalézt např. v [1].

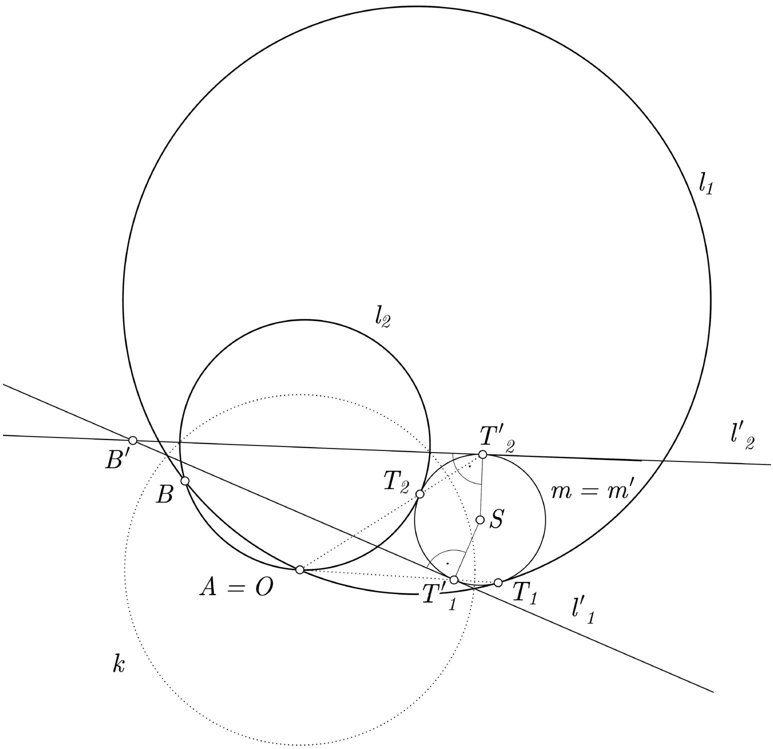
1) Přímka procházející středem O kruhové inverze se zobrazí na sebe.
2) Přímky neprocházející středem kruhové inverze O se zobrazí jako kružnice procházející středem O.
3) Kružnice procházející středem O se zobrazí jako přímka, která neprochází středem O.
4) Kružnice neprocházející středem O se zobrazí jako kružnice, která neprochází středem O.
5) Kruhová inverze zachovává úhly mezi křivkami (úhly mezi tečnami v jejich průsečících).
6) Kružnice, která protíná řídící kružnici ortogonálně, se zobrazí sama na sebe.

V další části budou prezentovány uvedené vlastnosti kruhové inverze při řešení dvou Apolloniových úloh.

Příklad 1

V rovině je dána kružnice $m(S;r)$ a body A, B, které na ní neleží. Sestrojte kružnici l, která prochází body A, B a dotýká se kružnice m.

Řešení. K tomu, aby úloha byla řešitelná, je potřeba, aby oba body A, B ležely uvnitř nebo oba vně kružnice m. Bod A zvolíme za střed řídící kružnice k, kterou sestrojíme tak, aby danou kružnici m s ohledem na výše uvedené poznatky protínala ortogonálně. V tomto případě je kružnice m slabě samodružná, tj. jedná se o bijektivní zobrazení, které ale není identické, tedy platí $m = m'$. Nemusíme tedy konstruovat její obraz (pro body ležící uvnitř kružnice m zvolíme řídící kružnici k libovolně). Bod B zobrazíme v kruhové inverzi na bod B'. Hledanou kružnici v kruhové inverzi konstruujeme jako přímku procházející bodem B', dotýkající se přitom kružnice m. Nyní chceme sestrojit tečnu z bodu B' ke kružnice m. Jinými slovy: pomocí kruhové inverze jsme konstrukci kružnice, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané kružnice, převedli konstrukci tečny ke kružnici procházející jistým bodem. V kruhové inverzi se tato tečna, která neprochází středem kruhové inverze, zobrazí jako kružnice, která prochází středem kruhové inverze A, dále prochází bodem B a dotýká se kružnice m.



Obr. 2

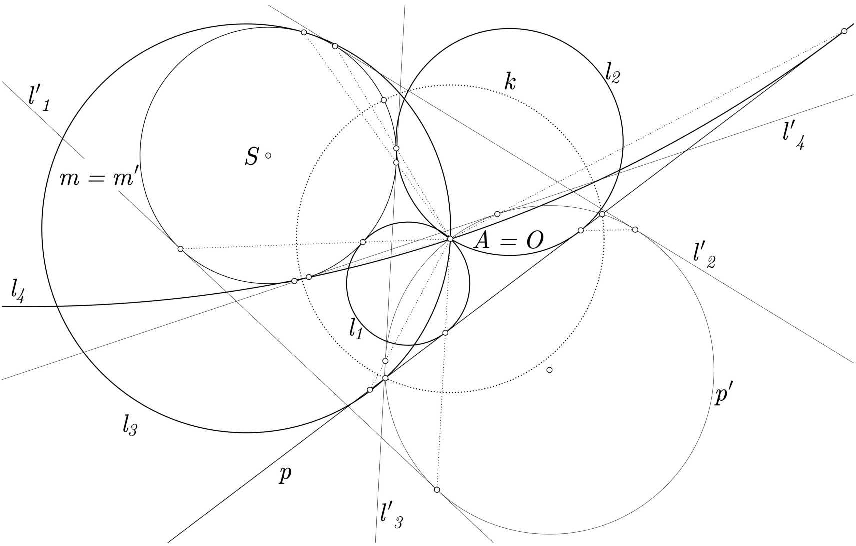
Závěr. V případě, že oba dané body leží současně uvnitř nebo současně vně dané kružnice, má úloha 2 řešení. Z bodu B' lze totiž vést 2 tečny l'_1

a l'_2 ke kružnici m (viz obr. 2). Nalezené kružnice l_1 a l_2 splňují podmínky úlohy.

Příklad 2

V rovině je dána kružnice $m(S; r)$, přímka p a bod A, který neleží na kružnici m a ani na přímce p. Sestrojte kružnici l, která se dotýká kružnice m, přímky p a prochází bodem A.

Řešení. Bod A podobně jako v příkladu 1 zvolíme za střed řídící kružnice k, kterou sestrojíme tak, aby danou kružnici m protínala ortogonálně. V takto zadané kruhové inverzi kružnice m zůstává samodružná, tedy $m = m'$. Protože přímka p neprochází středem kruhové inverze, zobrazí se na kružnici p', která prochází středem kruhové inverze. Obrazem hledané kružnice l v kruhové inverzi je tedy přímka, která se dotýká obou kružnic m a p'. Nyní sestrojíme pouze společnou tečnu kružnic m a p'.



Obr. 3

Závěr. V tomto případě, kdy přímka a kužnice nemají společný žádný bod, má úloha 4 řešení. Existují totiž 4 společné tečny l'_1, l'_2, l'_3 a l'_4 kružnic m a p' (viz obr. 3). Obrazy těchto tečen v dané kruhové inverzi jsou čtyři kružnice l_1, l_2, l_3 a l_4, které splňují podmínky úlohy. V případě, že by bod A ležel uvnitř kružnice m a přímka p by s danou kružnicí m neměla žádný společný bod, tak daná úloha nemá žádné řešení.

Literatura

[1] *Postnikov, M. M.*: Přednášky o geometrii. Semestry I.-V., Nauka, Moskva, 1979–1988.

[2] *Vyšín, J.*: Vybrané stati z elementární geometrie, SPN, Praha 1959.

O čem pojednává Benfordův zákon

JAROSLAV SEIBERT – JAROMÍR ZAHRÁDKA

Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice

Každý dobrý učitel matematiky se stále snaží hledat vhodné příležitosti, které mohou ukázat matematickou teorii v poněkud netradičních, ale přitom navenek atraktivnějších situacích. Navíc je jistě účelné, když se jedná o užití matematických poznatků v problematice, která je poněkud vzdálená od tradičních oblastí aplikací matematiky. Jednomu méně známému matematickému poznatku je věnovaný tento náš příspěvek.

Uvažujme libovolnou množinu číselných dat, která vyjadřují hodnotu jisté přirozeně vymezené veličiny z reálného světa. Přitom nezáleží na tom, zda se jedná o data geografická, ekonomická (ceny zboží, fakturované částky, platby pojištění), tabulky fyzikálních veličin, hodnoty některých funkčních závislostí mezi veličinami na jistém diskrétním definičním oboru a podobně. Jedním z důležitých předpokladů je, aby byl rozsah souboru alespoň v řádu stovek nebo ještě lépe tisíců. Určuje se potom četnost výskytu jednotlivých číslic na prvním platném místě. V našem případě tedy první číslice různé od nuly v zápisu číselného údaje v desítkové soustavě. Pro jednoduchost budeme v dalším textu používat pouze pojmenování „první číslice“. Zdá se zřejmé, že by pravděpodobnost $P(d)$ výskytu číslice $d = 1, 2, \dots, 9$ jako první číslice měla podléhat rovnoměrnému rozložení, tedy konkrétně $P(d) = \frac{1}{9} = 0{,}11\dots$ Ve skutečnosti se v souborech přirozených dat nejčastěji objevuje jako první číslice jednička a četnost výskytu dalších číslic postupně klesá v pořadí od 2 až k 9. Jak se můžeme v mnoha časopiseckých pramenech přesvědčit, je z uváděných