Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 223

V krabici bez víka s výškou 1 a s půdorysným rozměrem $m \times n$ (m, n jsou přirozená čísla) bylo uloženo mn dřevěných kostek (jednotkových krychlí). Nina si chtěla s kostkami hrát, když však otočila krabici krabici dnem vzhůru, žádné kostky z ní nevypadly, protože byly v krabici „natěsno“ a pevně je držely stěny krabice. Nina poté vytáhla z krabice několik kostek. Když opět krabici otočila, s překvapením zjistila, že z ní opět žádné kostky nevypadly, protože každá kostka v krabici byla v některém řádku nebo sloupci, ve kterém žádná kostka nechyběla a stěny krabice tento řádek nebo sloupec stále udržely. Určete, kolika způsoby mohla Nina takto kostky z krabice vytáhnout. *Peter Novotný*

Úloha 224

Najděte všechna přirozená čísla k, pro která existují celá čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 0$ a současně $|ab|$, $|bc|$, $|ca|$ jsou k-té mocniny přirozených čísel. *Patrik Bak*

Dále uvádíme řešení úloh 219 a 220, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle minulého (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 219

Celá čísla k, n splňují nerovnost

$$n \geq \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Dokažte, že pokud $k \geq 3$, lze číslo n zapsat ve tvaru součtu k navzájem různých celých kladných čísel, přičemž nejmenší z nich je sudé, druhé nejmenší je násobkem tří, třetí nejmenší násobkem čtyř atd., až největší z k sčítanců je násobkem $k + 1$. Platí stejný závěr i v případě $k = 2$?

Jaromír Šimša

Řešení. Nazvěme popsaný součet jako „k-rozklad čísla n“. Zvětšíme-li jeho největší sčítanec o $k+1$, dostaneme zřejmě k-rozklad čísla $n+k+1$. Proto podle principu matematické indukce bude závěr úlohy o k-rozkladech při pevném k platit, právě když k-rozklad bude mít prvních $k+1$ uvažovaných čísel n, tedy čísla

$$n \in \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n_0+k\}, \quad \text{kde } n_0 = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Experimentováním a následnou indukcí vzhledem k číslu k ověříme, že součet

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k \cdot (k+1) \tag{1}$$

je právě k-rozklad prvního zkoumaného čísla n_0. Když v tomto rozkladu změníme druhý a třetí sčítanec, jak nyní zapíšeme

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots \to 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots,$$

dostaneme k-rozklad čísla n_0+1 (na tomto místě potřebujeme předpoklad $k \geq 3$). Ostatní potřebné k-rozklady čísel n_0+j pro $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$ dostaneme z (1) změnou vždy jediného sčítance $(j-1) \cdot j$ na $j \cdot j$, který i tak zůstane menší než následující sčítanec $j(j+1)$. Tím je závěr úlohy dokázán pro každé $k \geq 3$.

Pro $k = 2$ tvrzení úlohy neplatí: i když odpovídající $n_0 = 8$ má 2-rozklad (1), tedy $8 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$, následující $n = 9$ žádný 2-rozklad nemá: rovnici $9 = 2a + 3b$ zřejmě vyhovují jediná přirozená čísla $a = 3$ a $b = 1$ (nutně totiž $3 \mid a$), avšak pro ně neplatí $2a < 3b$. (2-rozklady mají právě čísla 5, 8, 10 a všechna $n \geq 13$.)

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich. Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 220

V každém ze dvou výrazů

$$A = 2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}, \qquad B = 3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$$

se pravidelně střídá 2016 dvojek a 2016 trojek. Hodnota kterého výrazu je větší?
Jozef Mészáros

Řešení podle Martina Raszyka. Nejprve si uvědomíme, že pro všechna přirozená čísla k platí

$$2^{2^{k+1}} = 2^{2\cdot 2^k} = 4^{2^k} \geq 3^{2^k}. \tag{2}$$

Označme $a_0 = b_0 = 1$ a pro všechna přirozená čísla n položme

$$a_n = 2^{b_{n-1}}, \qquad b_n = 3^{a_{n-1}}.$$

Snadno určíme

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 < 3 = b_1, \\ a_2 &= 2^3 = 8 < 9 = 3^2 = b_2, \\ a_3 &= 2^9 = 512 < 6561 = 3^8 = b_3, \\ a_4 &= 2^{6561} > 2^{1024} + 2. \end{aligned}$$

Přitom podle (2) je $2^{1024} = 2^{2^{10}} \geq 3^{2^9} = b_4$, proto platí $a_4 > b_4 + 2$.

Užitím principu matematické indukce dále dokážeme, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí

$$a_{2n} > b_{2n} + 2. \tag{3}$$

Pro $n = 2$ je to nerovnost $a_4 > b_4 + 2$ odvozená výše. Nechť dále (3) platí pro nějaké přirozené číslo $n \geq 2$. Potom platí

$$a_{2(n+1)} = 2^{b_{2n+1}} = 2^{3^{a_{2n}}} \geq 2^{2^{a_{2n}}} > 2^{2^{b_{2n}+2}} = 2^{2\cdot 2^{b_{2n}+1}} \geq 2^{2^{b_{2n}+1}} + 2,$$

přičemž jsme využili odhad $c^2 > c + 2$ pro $c = 2^{2^{b_{2n}+1}} > 2$. Podle nerovnosti (2) platí

$$2^{2^{b_{2n}+1}} \geq 3^{2^{b_{2n}}} = 3^{a_{2n+1}} = b_{2n+2}.$$

Spojením obou předchozích nerovností pak dostaneme

$$a_{2(n+1)} > b_{2n+2} + 2 = b_{2(n+1)} + 2.$$

Užitím principu matematické indukce proto nerovnost (3) platí pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$.

Odtud již plyne $A > B$, protože podle (3) platí pro $n = 2016$

$$A = a_{2\cdot 2016} > b_{2\cdot 2016} + 2 = B + 2 > B.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek