MATEMATIKA

O dvou shodných kružnicích

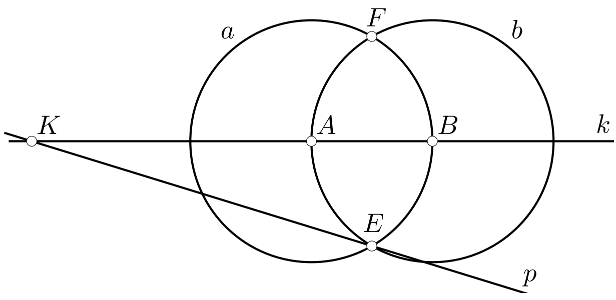
ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V článku ukážeme, že dvě shodné, protínající se kružnice mohou skrývat mnoho zajímavých geometrických vztahů, které lze snadno objevit a dokázat pomocí základních planimetrických znalostí.

Uvažujme dvě shodné kružnice, z nichž každá prochází středem druhé, tj. kružnice $a(A; |AB|), b(B; |AB|)$. Jejich průsečíky označme E, F. Na polopřímce BA (vně obou kružnic) zvolme bod K a uvažujme přímku $p = KE$ (obr. 1).

Pro délky úseček s krajními body v průsečících sestrojených kružnic a přímek dokážeme dále několik zajímavých tvrzení. Značení bodů v uvedených tvrzeních jsou ve shodě se značením na obr. 1 a navazují na sebe.



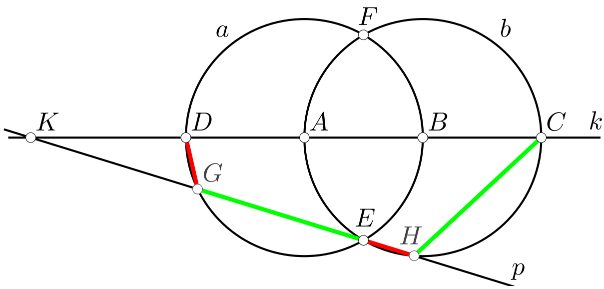
Obr. 1

Tvrzení 1 (o tětivách kružnic)

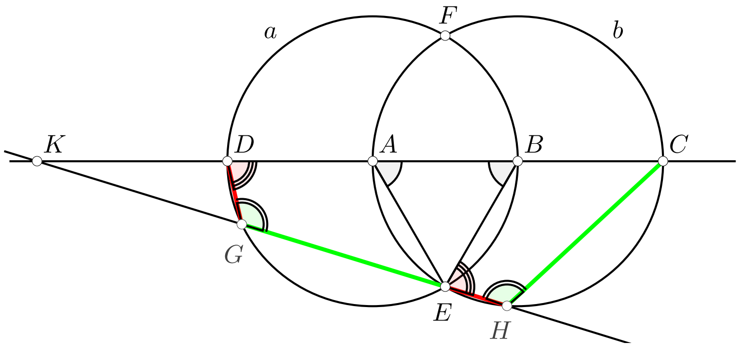
Nechť středná $k = AB$ protíná kružnici a v bodě $D \neq B$ a kružnici b v bodě $C \neq A$. Přímka $p = KE$ protíná kružnici a v bodě $G \neq E$ a kružnici b v bodě $H \neq E$ (obr. 2). Pak platí $|DG| = |EH|$ a současně $|GE| = |HC|$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že čtyřúhelníky $ADGE$, $BEHC$ jsou shodné (obr. 3). Trojúhelníky EAD a CBE jsou shodné, navíc rovnoramenné s úhlem 120° při hlavních vrcholech A, B. Označme $|\sphericalangle BDG| = \varphi$. Čtyřúhelník $BDGE$ je tětivový, proto $|\sphericalangle BEG| = 180° - \varphi$ a $|\sphericalangle BEH| = \varphi$. Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle DBE| = 60°$, je $|\sphericalangle DGE| = 120°$. Čtyřúhelník $CAEH$ je také tětivový, a proto $|\sphericalangle EHC| = 120° = |\sphericalangle DGE|$.

Čtyřúhelníky $ADGE$, $BEHC$ jsou tudíž shodné, takže $|DG| = |EH|$ a $|GE| = |HC|$.



Obr. 2 Shodné tětivy

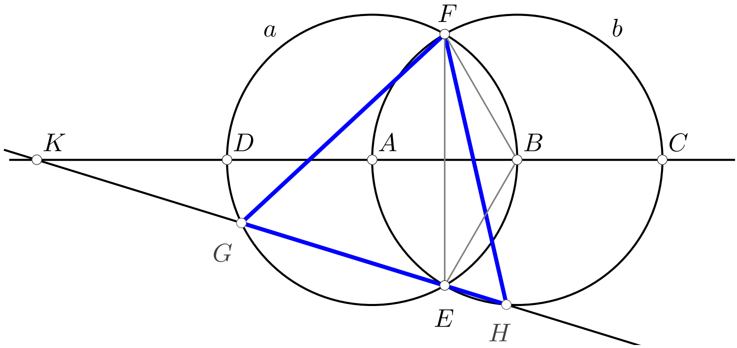


Obr. 3 Shodné čtyřúhelníky

Tvrzení 2

Trojúhelník FGH je rovnostranný (obr. 4).

Důkaz. V důkazu využijeme obvodové úhly. Kružnice a, b jsou shodné a EF je jejich společná tětiva. Body G, H leží na větších obloucích těchto kružnic nad tětivou EF, úhly při vrcholech G, H jsou tudíž shodné. Středové úhly, které těmto obvodovým úhlům odpovídají, mají velikost 120°, proto $|\sphericalangle FGH| = |\sphericalangle GHF| = 60°$ (obr. 4).



Obr. 4 Rovnostranný trojúhelník

Tvrzení 1 a tvrzení 2 jsou ekvivalentní. Úsečky DG a EH jsou tětivy shodných kružnic a bod F leží vždy na větším z oblouků nad těmito tětivami. Proto $|DG| = |EH|$ právě tehdy, když $|\sphericalangle DFG| = |\sphericalangle EFH|$.

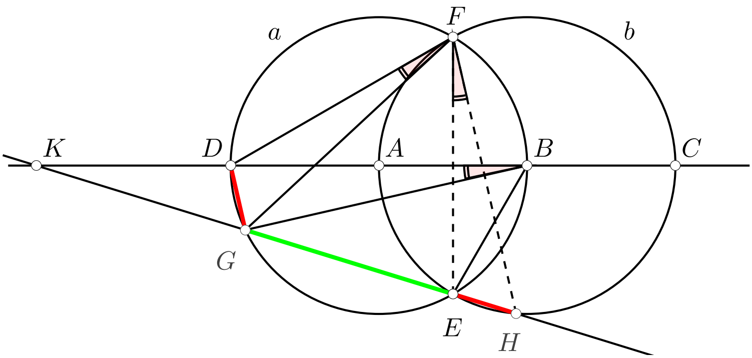
Pro úhly při vrcholu F platí (obr. 5):

$$|\sphericalangle DFE| = 60° = |\sphericalangle DFG| + |\sphericalangle GFE|,$$

$$|\sphericalangle GFH| = |\sphericalangle DFE| \iff |\sphericalangle DFG| = |\sphericalangle EFH|.$$

Podobně

$$|\sphericalangle GFH| = |\sphericalangle EFC| \iff |\sphericalangle GFE| = |\sphericalangle HFC|.$$



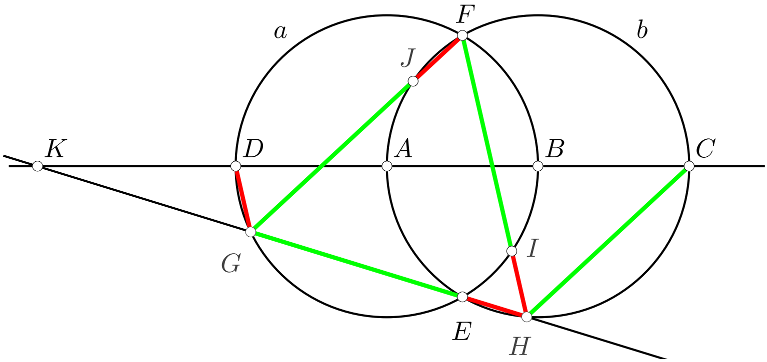
Obr. 5 Rovnostranný trojúhelník – úhly

Na základě dokázaných tvrzení snadno dokážeme shodnost délek vyznačených na obr. 6.

Tvrzení 3

Platí $|EH| = |IH| = |JF|$ a zároveň $|EG| = |GJ| = |IF|$.

Důkaz přenecháváme čtenáři.

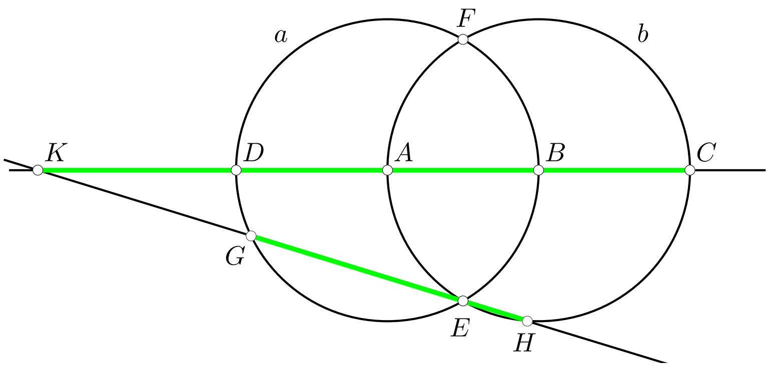


Obr. 6 Další délky

Tvrzení, která jsme dosud uvedli, bychom nejspíš snadno objevili při pečlivém rýsování. Podívejme se na některá další tvrzení, která nejsou na první pohled zřejmá.

Tvrzení 4

Bod E dělí úsečku GH v poměru $|GE| : |EH| = |CK| : |DK|$.



Obr. 7 Poměry délek

Důkaz. Využijeme výše dokázanou shodnost úseček. Protože $|EH| = |DG|$ a $|GE| = |CH|$, můžeme místo dané rovnosti poměrů dokazovat rovnost

$$|CH| : |DG| = |CK| : |DK|.$$

Tu dokážeme stanovením poměrů délek stran v trojúhelnících KDG, KHC (obr. 8). Tyto trojúhelníky nejsou podobné, vnitřní úhel při vrcholu G má velikost $60°$, vnitřní úhel při vrcholu H má velikost $120°$ a vnitřní úhel při vrcholu C je vždy menší než $60°$. Ukážeme ale, že oba trojúhelníky mají stejný poměr délek zkoumaných dvojic stran.

Označme ψ velikost úhlu DKG. Ze sinové věty plyne

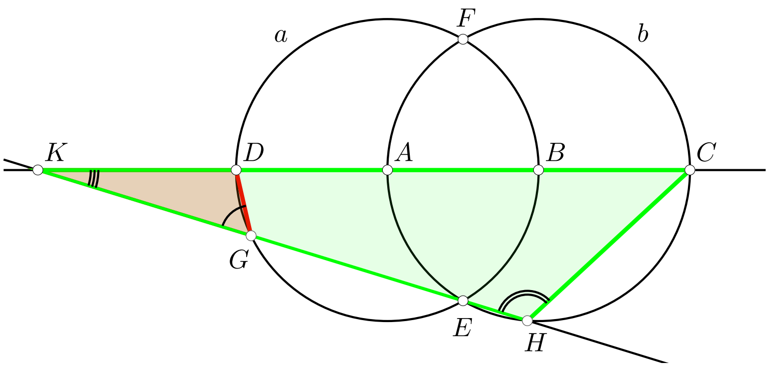
$$\frac{|DG|}{|DK|} = \frac{\sin\psi}{\sin 60°} \quad \text{a} \quad \frac{|CH|}{|CK|} = \frac{\sin\psi}{\sin 120°} = \frac{\sin\psi}{\sin 60°},$$

a tudíž

$$\frac{|DG|}{|DK|} = \frac{|CH|}{|CK|},$$

a odtud

$$\frac{|CH|}{|DG|} = \frac{|CK|}{|DK|}.$$



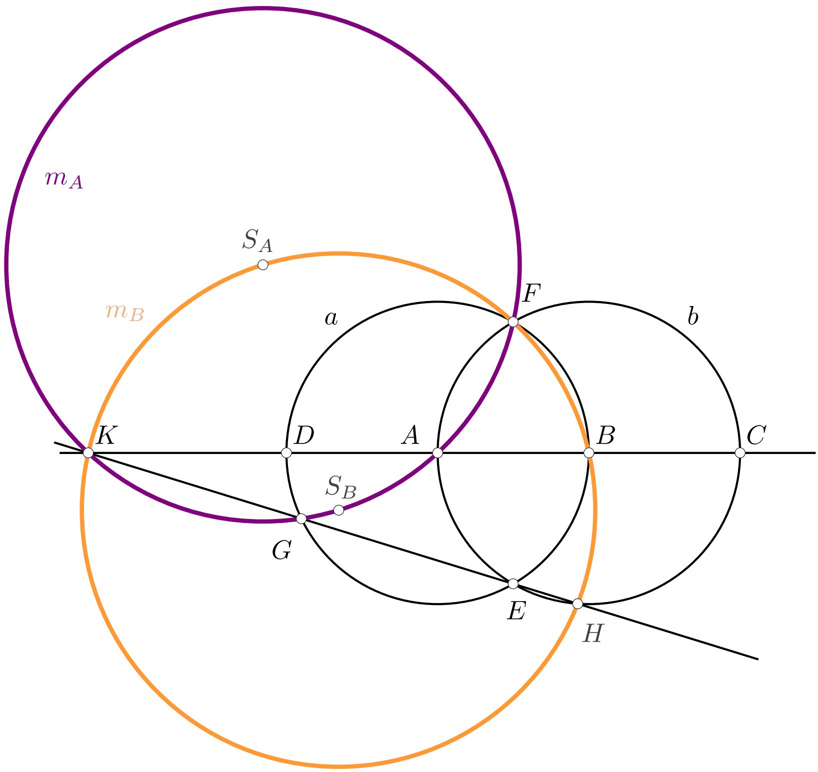
Obr. 8 Úhly v trojúhelnících

Tvrzení 5

a) Body K, G, A, F leží na téže kružnici m_A.

b) Body K, H, B, F leží na téže kružnici m_B.

c) Kružnice m_A, m_B jsou shodné a procházejí navzájem svými středy.



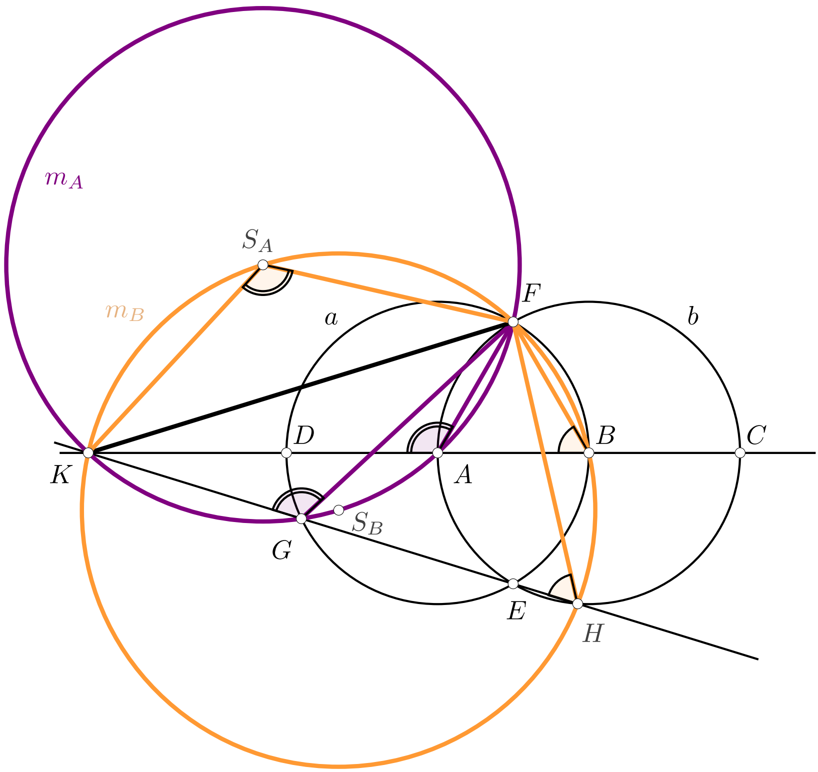
Obr. 9 Shodné kružnice

Důkaz. V důkazu využijeme úhly, jejichž velikost známe z důkazu prvých tvrzení (obr. 10). Úsečka KF je společnou tětivou obou kružnic m_A, m_B.

a) Víme, že $|\sphericalangle KGF| = 120° = |\sphericalangle KAF|$ a že body G, A leží v téže polorovině ohraničené přímkou KF. Body G, A proto leží na tomtéž oblouku pro obvodový úhel 120° nad tětivou KF.

b) Podobně $|\sphericalangle KHF| = 60° = |\sphericalangle KBF|$ a body H, B leží v téže polorovině ohraničené přímkou KF. Body H, B proto leží na tomtéž oblouku pro obvodový úhel 60° nad tětivou KF.

c) Protože $60° = 180° - 120°$, mají oba výše zmíněné oblouky týž poloměr. Protože $120° = 2 \cdot 60°$, leží střed oblouku, na němž leží body H, B, tj. střed S_B kružnice m_B, na kružnici m_A (na tom z oblouků nad tětivou KF, kde leží body G, A).



Obr. 10 Středové a obvodové úhly v kružnicích

Tvrzení 6

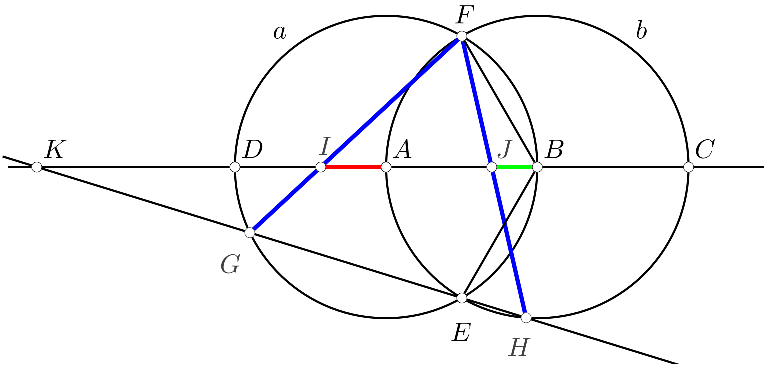
Body I, J, v nichž protínají strany trojúhelníku GHF úsečky DA, AB, dělí tyto úsečky postupně v poměrech

$$|IA| : |DA| = |DA| : |KA|,$$

$$|JB| : |AB| = |AB| : |KB|.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme (a pak v důkazu využijeme) následující podobnosti trojúhelníků, viz obr. 11:

- Trojúhelníky IGK, IAF jsou podobné.
- Trojúhelníky JHK, JBF jsou podobné.

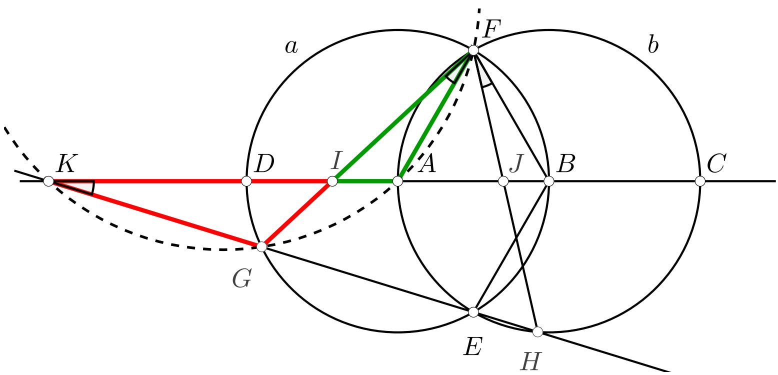


Obr. 11 Rozdělení úseček

Z předchozích úvah známe všechny úhly uvažovaných trojúhelníků.

• Vrcholové úhly při vrcholu I jsou shodné a úhly při vrcholech G, A mají velikost $120°$.

• Podobně vrcholové úhly při vrcholu J jsou shodné a dále úhly při vrcholech H, B mají velikost $60°$. Pro ilustraci je na obr. 12 znázorněna i shodnost úhlů ψ při vrcholech K, F.



Obr. 12 Rozdělení úseček – podobné trojúhelníky

Důkaz rovnosti dělicích poměrů provedeme pouze pro bod I, druhý (obdobný) důkaz pro bod J ponecháme čtenáři.

Z podobnosti trojúhelníků IGK, IAF plyne

$$|IK| : |IG| = |IF| : |IA|,$$

odkud

$$|IK| \cdot |IA| = |IF| \cdot |IG|.$$

Z mocnosti bodu I ke kružnici a plyne

$$|IF| \cdot |IG| = |ID| \cdot |IB|.$$

Odtud

$$|IK| \cdot |IA| = |ID|\,|IB| = (|AB| - |IA|)(|AB| + |IA|) = \\ = |AB|^2 - |IA|^2.$$

Protože

$$|KA| \cdot |IA| = (|IK| + |IA|)|IA| = |IK| \cdot |IA| + |IA|^2,$$

platí

$$|KA| \cdot |IA| = |AB|^2 - |IA|^2 + |IA|^2 = |AB|^2 = |DA|^2.$$

Máme tak

$$\frac{|IA|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|KA|}.$$

Pokud budeme považovat kružnici a za jednotkovou a vzdálenost $|AK|$ označíme m, pak výše uvedené tvrzení říká, že bod I leží v jedné m-tině úsečky AD.

Podobně bod J leží v jedné $(m+1)$-tině úsečky AB.

Další shodné délky

Pokud do našeho základního schématu dvou shodných kružnic, jejich středné a přímky KE, sestrojíme ještě jednu kružnici, najdeme další shodné úsečky.

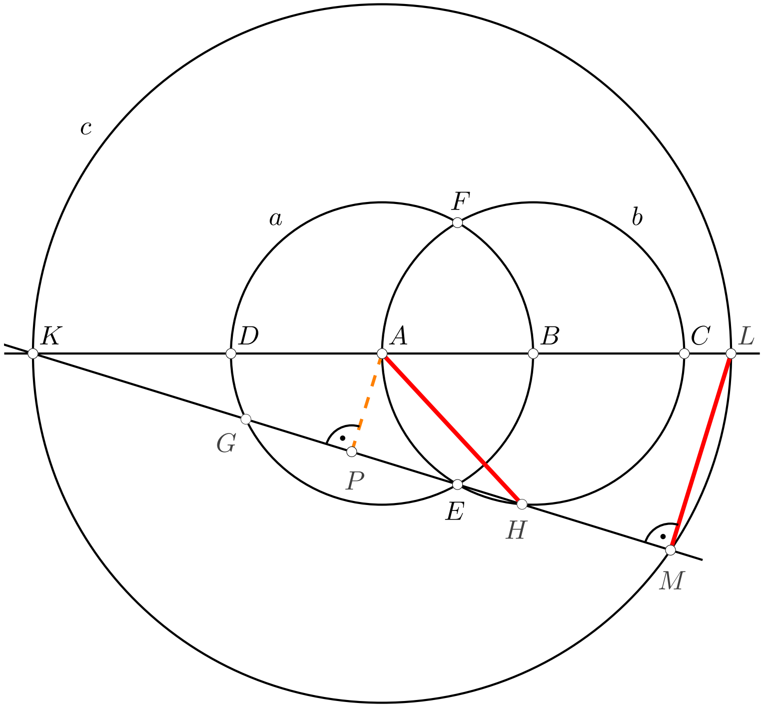
Tvrzení 7

Uvažujme kružnici $c(A; |AK|)$. Označme $L \neq K$ její průsečík s přímkou AB a $M \neq K$ průsečík s přímkou KE. Potom platí $|AH| = |LM|$.

Důkaz. Využijeme pravoúhlé trojúhelníky a obvodové úhly. Protože KL je průměr kružnice c, je úhel LMK pravý, viz obr. 13.

Označme P patu kolmice vedené bodem A k přímce KE. Pak je úsečka AP střední příčkou trojúhelníku LMK, tedy $|LM| = 2\,|AP|$.

Protože $|\sphericalangle EHF| = 60°$ a A je střed oblouku EF, platí $|\sphericalangle EHA| = 30°$. Je tedy $|\sphericalangle PAH| = 60°$ a $|AH| = 2\,|AP|$, tudíž $|AH| = |LM|$.



Obr. 13 Shodné úsečky

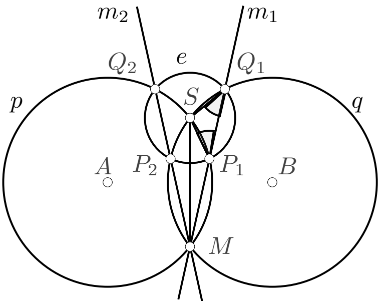
Tvrzení 8 (o třech kružnicích)

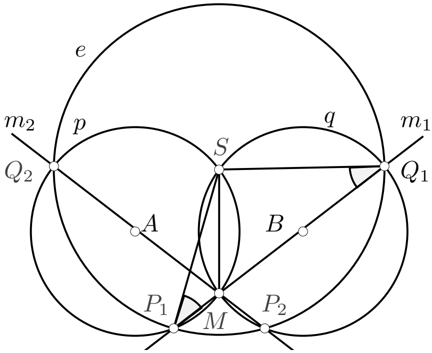
Shodné kružnice p, q se protínají v bodech S, M. Pak libovolná přímka m procházející bodem M, $m \neq MS$, protíná kružnice p, q v dalších bodech, které označíme po řadě P, Q. Potom platí $|PS| = |QS|$, tedy body P, Q leží na téže kružnici se středem S.

Důkaz. MS je společná tětiva kružnic p, q (obr. 14). Je-li bod M vnitřním bodem úsečky PQ, leží body P, Q v opačných polorovinách s hraniční přímkou MS, a tudíž na shodných obloucích nad tětivou MS, a platí $|\sphericalangle SPM| = |\sphericalangle SQM|$, proto

$$|\sphericalangle SPQ| = |\sphericalangle SQP|.$$

Je-li bod M vnějším bodem úsečky PQ, leží body P, Q v téže polorovině s hraniční přímkou MS. Bod M proto leží na doplňkových obloucích nad tětivou MS, a platí $|\sphericalangle SPM| = 180° - |\sphericalangle SQM|$ a $|\sphericalangle SPQ| = |\sphericalangle SQP|$. V obou případech je PSQ rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem S a body P, Q leží na téže kružnici se středem S.

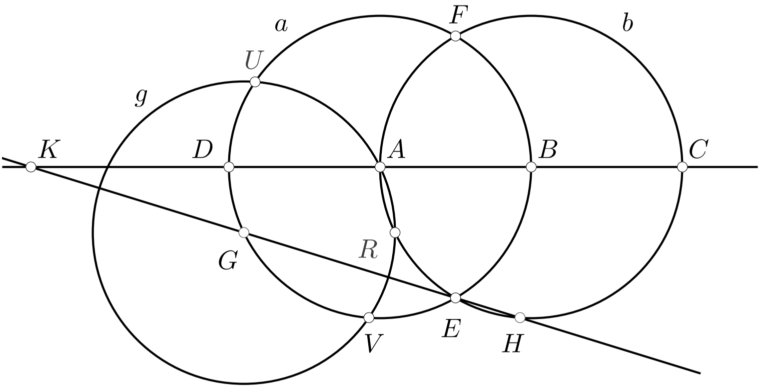




Obr. 14 Tři kružnice

Tři shodné kružnice – kružnice $g(G; |GA|)$

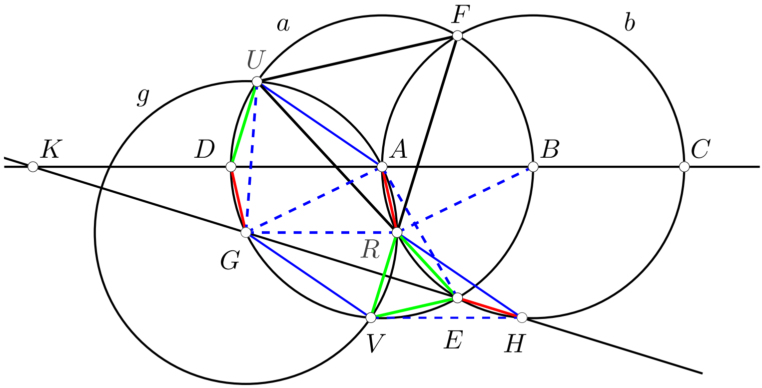
Na závěr našeho zkoumání geometrických vztahů mezi kružnicemi jsme nechali řadu velmi snadných rovností délek, které získáme, pokud do naší výchozí konstrukce doplníme kružnici $g(G; |GA|)$ a její průsečíky s kružnicemi a, b: $g \cap a = \{U, V\}$, $g \cap b = \{A, R\}$, jako na obr. 15.



Obr. 15 Třetí shodná kružnice

Vztahy, které zde můžeme nalézt, uvedeme dále v podobě výčtu tvrzení, kde místo podrobných důkazů uvedeme jen hlavní myšlenku nějakého zdůvodnění. Budeme je uvádět v takovém pořadí, v němž je můžeme postupně odvozovat. Všechny zmíněné vztahy ale můžeme dokázat mnoha různými postupy (a tudíž také v různém pořadí).

Jednotlivá tvrzení nebudeme ilustrovat samostatnými obrázky, ponecháme je čtenáři. Některé z dále uvedených vztahů jsou znázorněny na obr. 16.



Obr. 16 Shodné délky

- *$GRBA$ je kosočtverec*, protože kružnice g, b jsou shodné. Odtud
- *$GRAD$ je rovnoběžník*. Odtud
- $|DG| = |AR|$. Odtud a z $|DG| = |EH|$
- $|\sphericalangle RBH| = |\sphericalangle ABE| = 60°$. Odtud
- $|RH| = |AE|$. Odtud a z $|AE| = |AB|$
- *Trojúhelník HBR je rovnostranný a $GVHR$ je kosočtverec*. Odtud a z velikostí úhlů $|\sphericalangle GFV| = |\sphericalangle RFH| = 30°$ a $|\sphericalangle GFH| = 60°$ plyne, že přímky FV i FR jsou osy úhlu GFH, a tudíž
- *F, R, V leží v přímce*. Toto tvrzení ale platí obecně, jak jsme viděli v pomocném tvrzení o třech kružnicích. Odtud dále
- *ERV, FRU jsou rovnostranné trojúhelníky*. Body F, R, V jsou kolineární a $|\sphericalangle FRE| = 120°$, proto $|\sphericalangle ERV| = 60°$ a ze souměrnosti kružnic g, b dle přímky AR jsou trojúhelníky ERV, FRU rovnoramenné s hlavním vrcholem R.

- *GAU, GAV jsou rovnostranné trojúhelníky a AUGV je kosočtverec*, protože kružnice g, a jsou shodné a procházejí jedna středem druhé. Odtud a z $|DG| = |AR|$
- $|DU| = |RV|$ a *šestiúhelník RAUDGV je středově souměrný.*
- ... a další vztahy.

V článku jsme uvedli řadu jednoduchých planimetrických tvrzení. K jejich důkazům stačí zpravidla jedna či několik snadných úvah. Rozmyšlení uvedených tvrzení a provedení důkazů tak může být pro studenty vhodnou rozcvičkou před zkouškou z planimetrie nebo před soutěžními koly matematické olympiády. Možná vás uvedená tvrzení a jejich důkazy inspirují k hledání dalších vztahů, které jsou skryté v sestavě dvou nebo tří shodných kružnic, či alespoň doplníte nedokončený seznam o další vztahy.

L i t e r a t u r a

[1] *Horák, S.*: Kružnice. Škola mladých matematiků, svazek 16, Praha, 1966.

[2] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.*: Dělení úsečky. MFI, roč. 24 (2015), č. 2, s. 95–104.

Simsonova–Wallaceova věta

JIŘÍ BLAŽEK — PAVEL PECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V tomto článku se budeme věnovat jedinečné vlastnosti kružnice opsané danému trojúhelníku. Pro každý její bod P platí, že paty kolmic z P k prodlouženým stranám trojúhelníku leží na jedné přímce (obr. 1). Tato vlastnost kružnice trojúhelníku opsané je známa jako Simsonova [9] nebo Simsonova–Wallaceova věta (S–W věta) [2]. Přestože skotský matematik *Robert Simson* (1687–1768) se podobným problémem zabýval dříve, větu do dnešní podoby zformuloval a dokázal až 30 let po Simsonově smrti Skot *William Wallace* (1768–1843) [3][1].

[*] Autoři děkují recenzentům za hodnotné rady a připomínky, které pomohly zvýšit kvalitu článku.

[1] Z tohoto důvodu se též užívá název Wallaceova–Simsonova věta [4, 12]