- *GAU, GAV jsou rovnostranné trojúhelníky a $AUGV$ je kosočtverec*, protože kružnice g, a jsou shodné a procházejí jedna středem druhé. Odtud a z $|DG| = |AR|$
- $|DU| = |RV|$ a *šestiúhelník $RAUDGV$ je středově souměrný.*
- ... a další vztahy.

V článku jsme uvedli řadu jednoduchých planimetrických tvrzení. K jejich důkazům stačí zpravidla jedna či několik snadných úvah. Rozmyšlení uvedených tvrzení a provedení důkazů tak může být pro studenty vhodnou rozcvičkou před zkouškou z planimetrie nebo před soutěžními koly matematické olympiády. Možná vás uvedená tvrzení a jejich důkazy inspirují k hledání dalších vztahů, které jsou skryté v sestavě dvou nebo tří shodných kružnic, či alespoň doplníte nedokončený seznam o další vztahy.

L i t e r a t u r a

[1] *Horák, S.*: Kružnice. Škola mladých matematiků, svazek 16, Praha, 1966.

[2] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.*: Dělení úsečky. MFI, roč. 24 (2015), č. 2, s. 95–104.

Simsonova–Wallaceova věta

JIŘÍ BLAŽEK — PAVEL PECH

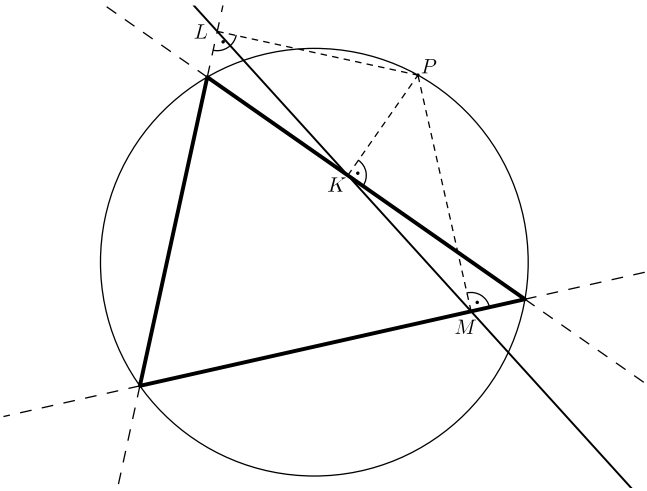
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V tomto článku se budeme věnovat jedinečné vlastnosti kružnice opsané danému trojúhelníku. Pro každý její bod P platí, že paty kolmic z P k prodlouženým stranám trojúhelníku leží na jedné přímce (obr. 1). Tato vlastnost kružnice trojúhelníku opsané je známa jako Simsonova [9] nebo Simsonova–Wallaceova věta (S–W věta) [2]. Přestože skotský matematik *Robert Simson* (1687–1768) se podobným problémem zabýval dříve, větu do dnešní podoby zformuloval a dokázal až 30 let po Simsonově smrti Skot *William Wallace* (1768–1843) [3][1].

[*]Autoři děkují recenzentům za hodnotné rady a připomínky, které pomohly zvýšit kvalitu článku.

[1]Z tohoto důvodu se též užívá název Wallaceova–Simsonova věta [4, 12]

S–W větu vyslovíme nyní v poněkud silnějším tvaru, než je uvedena na počátku článku. Větu nejprve dokážeme, potom budeme řešit dva problémy, které s ní souvisí.



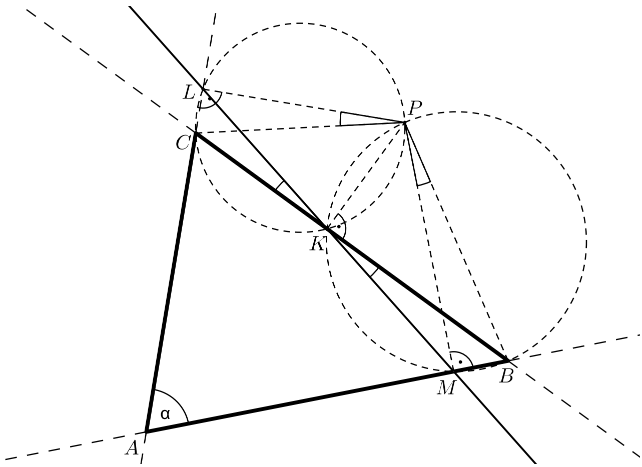
Obr. 1

Věta (Simsonova–Wallaceova)

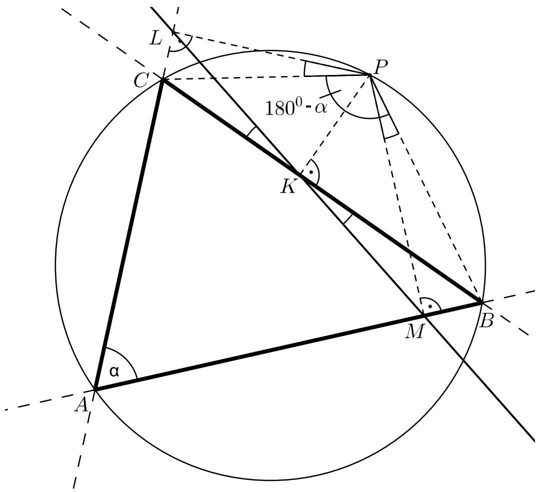
Paty kolmic K, L, M z bodu P k přímkám BC, CA, AB leží na jedné přímce (jsou kolineární), právě když P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že body K, L, M leží na jedné přímce. Pokud některé dva z bodů K, L, M splývají, potom bod P je jedním z vrcholů trojúhelníka a tvrzení platí. Dále předpokládejme, že žádné dva z bodů K, L, M nesplývají. Potom jsou úhly MKB a LKC shodné, tj. platí $|\sphericalangle MKB| = |\sphericalangle LKC|$. Z Thaletovy věty plyne, že čtyřúhelníkům $LCKP$ a $MBPK$ lze opsat kružnice. Z věty o obvodových úhlech pak dostáváme $|\sphericalangle MKB| = |\sphericalangle MPB|$ a $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle LPC|$, a tedy i $|\sphericalangle MPL| = |\sphericalangle BPC|$ (obr. 2).

Označme α velikost vnitřního úhlu při vrcholu A (obr. 3). Potom platí $|\sphericalangle MPL| = 180° - \alpha$. Jelikož stejnou velikost má i úhel BPC, lze čtyřúhelníku $ABPC$ opsat kružnici. Bod P tedy leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.



Obr. 2 Úhly MPL a BPC jsou shodné



Obr. 3 Bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC

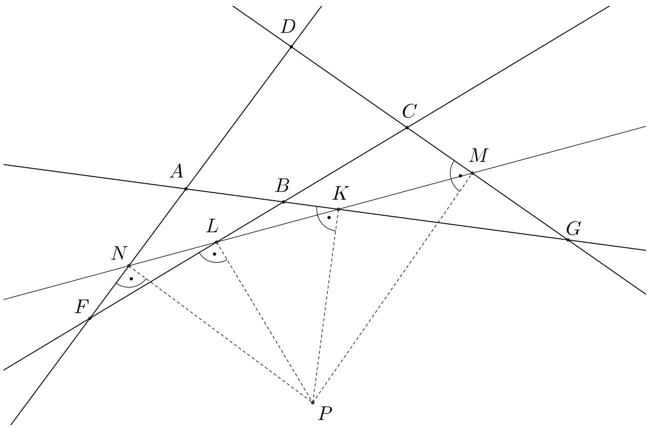
Nyní naopak předpokládejme, že P je libovolným bodem kružnice trojúhelníku ABC opsané. Pokud P splývá s některým vrcholem trojúhelníku, je tvrzení zřejmé. Dále předpokládejme, že P nesplývá s žádným vrcholem trojúhelníku. Chceme dokázat, že body K, L, M jsou kolineární. Stačí ukázat, že úhly MKB a LKC jsou shodné. Čtyřúhelník $MBPK$ je tětivový, odtud podle věty o obvodových úhlech $|\sphericalangle MKB| = |\sphericalangle MPB|$. Obdobně dostaneme $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle LPC|$. Dále platí $|\sphericalangle LPM| = 180° - \alpha$, protože čtyřúhelník $ALPM$ je tětivový. Odtud plyne $|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle MPB|$ a dále $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle MKB|$.

Přímka, na níž leží body K, L, M, se nazývá Simsonova. Tato přímka má řadu zajímavých vlastností, viz např. [1, 3, 6, 8, 11].

Problém 1

V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Najděte množinu všech bodů P takových, aby paty kolmic z bodu P k přímkám AB, BC, CD a DA ležely na jedné přímce.

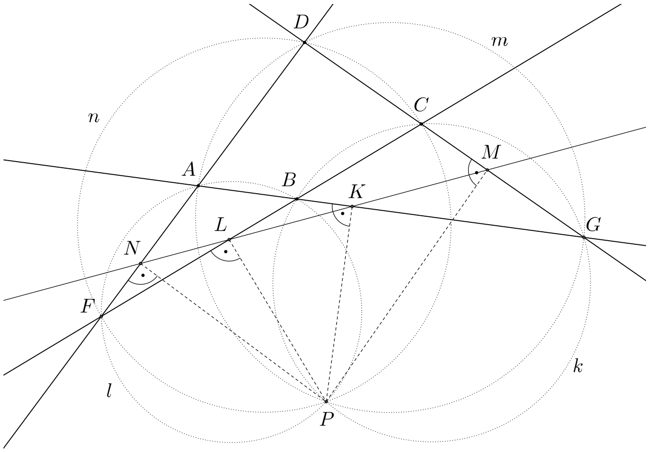
Řešení. Úlohu vyřešíme užitím S–W věty. Nejprve předpokládejme, že žádné dvě strany čtyřúhelníka $ABCD$ nejsou rovnoběžné. Leží-li body K, L, M, N na téže přímce, leží na této přímce i libovolná trojice těchto bodů, např. K, L, M (obr. 4).



Obr. 4

Body K, L, M lze chápat jako paty kolmic z bodu P ke stranám trojúhelníku BCG, kde G je průsečík přímek AB a CD. Podle S–W věty leží bod P na kružnici k opsané trojúhelníku BCG. Stejnou podmínku musí splňovat body K, L, N. Bod P proto leží na kružnici l opsané trojúhelníku

ABF, kde F je průsečík přímek BC a AD. Analogickou aplikací S–W věty, tentokrát na paty kolmic KMN a LMN, zjistíme, že bod P leží také na kružnicích m, n opsaných trojúhelníkům DAG a CDF (obr. 5).



Obr. 5

Ukážeme, že se kružnice k, l, m, n protínají v jediném bodě. Označme P druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABF a CDF. Dokážeme, že bod P leží také na kružnicích opsaných trojúhelníkům ADG a BCG. Stačí ukázat, že čtyřúhelníky $PADG$ a $PBCG$ jsou tětivové (obr. 6). Platí

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle FPD| - |\sphericalangle FPA| = |\sphericalangle FCD| - |\sphericalangle FBA| =$$
$$= 180^\circ - |\sphericalangle BCG| - |\sphericalangle CBG| = |\sphericalangle AGD|,$$

proto čtyřúhelník $PADG$ je tětivový. Analogicky pro čtyřúhelník $PBCG$ platí

$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle FPC| - |\sphericalangle FPB| = 180^\circ - |\sphericalangle FDC| - (180^\circ - |\sphericalangle FAB|) =$$
$$= |\sphericalangle FAG| - |\sphericalangle FDG| = |\sphericalangle AGD| = |\sphericalangle BGC|,$$

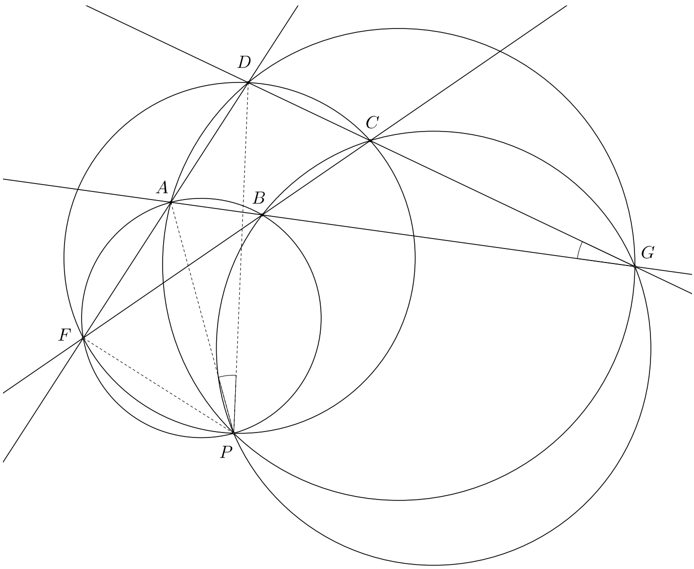
a tudíž $PBCG$ je také tětivový čtyřúhelník.

Snadno ověříme, že společný průsečík P kružnic k, l, m, n vyhovuje zadání. Pokud jsou dvě strany čtyřúhelníku $ABCD$ rovnoběžné, např.

$AB \parallel CD$, a strany BC a AD různoběžné, pak úloze vyhovuje bod F. Pokud $ABCD$ je rovnoběžník, řešení úlohy neexistuje.

Poznámka. Právě popsaná vlastnost, že se kružnice opsané trojúhelníkům ABF, CDF, ADG, BCG protínají v jediném bodě P bývá označována jako Miquelova věta. Bod P se nazývá *Miquelův bod* čtyřúhelníku $ABCD$ [6]. Tuto větu publikoval *Auguste Miquel* v roce 1838 [7], *Jakob Steiner* publikoval tutéž větu již v letech 1827/1828 [10]. V [5] je uvedeno, že zmíněnou větu publikoval poprvé již v roce 1799 William Wallace.

Výsledku získaného řešením problému 1 využijeme při řešení následujícího příkladu.

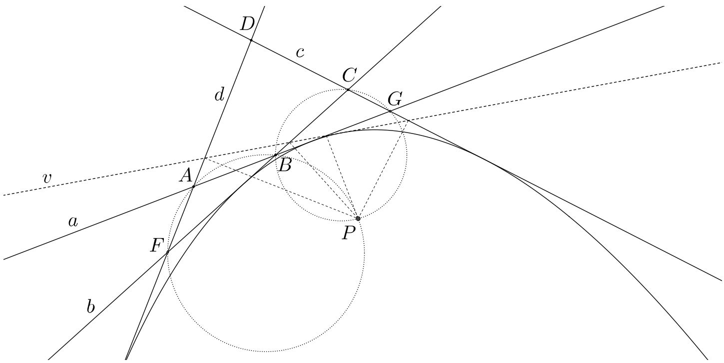


Obr. 6

Příklad 1

Sestrojte parabolu, jsou-li dány čtyři její tečny a, b, c, d.

Řešení. Označme $A = d \cap a$, $B = a \cap b$, $C = b \cap c$ $D = c \cap d$, $G = a \cap c$ a $F = b \cap d$. Jak známo, pro parabolu platí: paty kolmic z ohniska paraboly k jejím tečnám leží na vrcholové tečně v hledané paraboly. Ohnisko paraboly je tedy Miquelovým bodem čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 7).



Obr. 7

Nyní se budeme zabývat problémem 2, který (dle mínění autorů) nebyl dosud publikován.

Problém 2

V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Najděte množinu všech bodů P takových, že spojnice pat kolmic K, N z bodu P k přímkám AB, DA je rovnoběžná se spojnicí pat kolmic L, M z bodu P k přímkám BC, CD.

Řešení. Předpokládejme, že přímky KN a LM jsou rovnoběžné (obr. 8). Protože čtyřúhelníky $AKPN$ a $PLCM$ jsou tětivové, platí podle věty o obvodových úhlech

$$|\sphericalangle ANK| = |\sphericalangle APK| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CML| = |\sphericalangle CPL|.$$

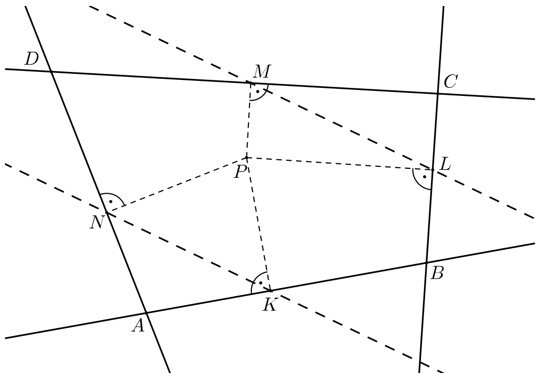
Odtud plyne

$$\begin{aligned} |\sphericalangle APC| &= |\sphericalangle APK| + |\sphericalangle KPL| + |\sphericalangle LPC| = \\ &= |\sphericalangle ANK| + |\sphericalangle LMC| + |\sphericalangle KPL|. \end{aligned} \tag{1}$$

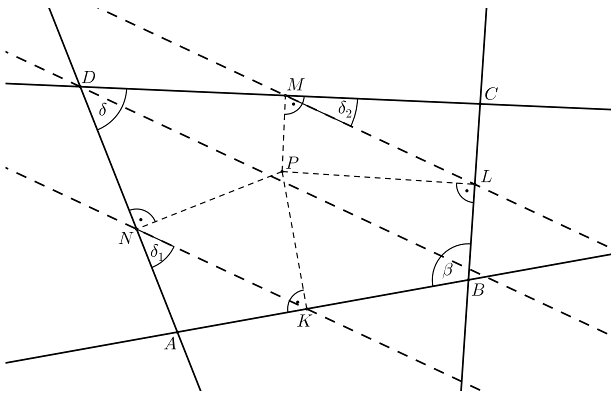
Pro polohu bodu P (obr. 8) je úhel KPL doplňkovým k úhlu při vrcholu B, tj.

$$|\sphericalangle KPL| = 180^\circ - |\sphericalangle KBL| = 180^\circ - \beta, \tag{2}$$

a je tedy konstantní (nezávislý na poloze bodu P). Ukážeme, že i součet úhlů LMC a ANK je konstantní. Za tím účelem veďme třetí rovnoběžku s přímkami KN a ML bodem D (obr. 9).



Obr. 8 Přímky KN a LM jsou rovnoběžné

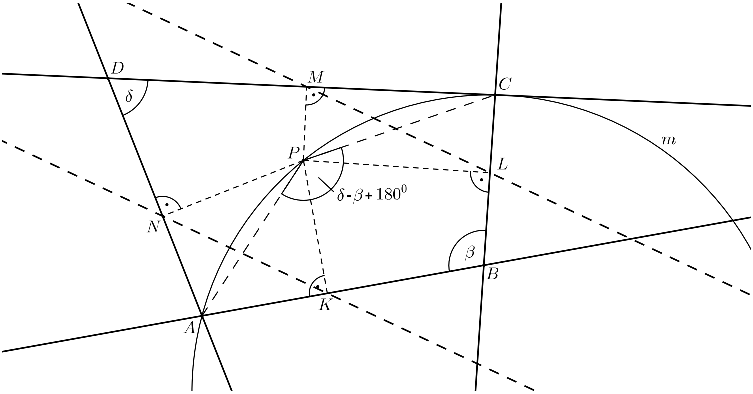


Obr. 9

Je zřejmé, že platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle LMC| + |\sphericalangle ANK|$, neboli $\delta = \delta_1 + \delta_2$, přičemž velikost úhlu ADC je opět nezávislá na poloze bodu P. Došli jsme tak ke vztahu

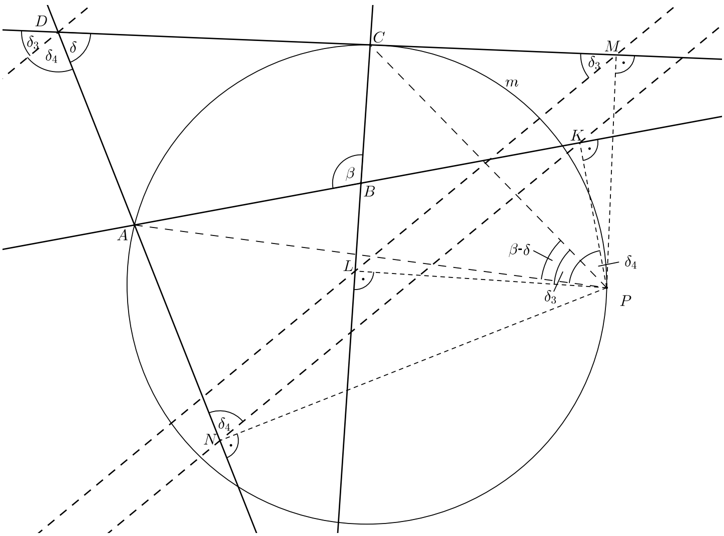
$$|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle KPL| = \delta + 180^\circ - \beta. \tag{3}$$

Předpokládejme, že $\beta \neq \delta$. Podle věty o obvodových úhlech leží bod P na příslušném oblouku kružnice m, která prochází body A a C (obr. 10).



Obr. 10 Bod P leží na oblouku kružnice m

Při důkazu jsme mlčky předpokládali takovou polohu bodu P vzhledem ke čtyřúhelníku $ABCD$, pro niž platí vztahy (1), (2) a (3). Pro jiné polohy bodu P postupujeme podobným způsobem. Uvedeme dále důkaz ještě pro jinou polohu bodu P (obr. 11).



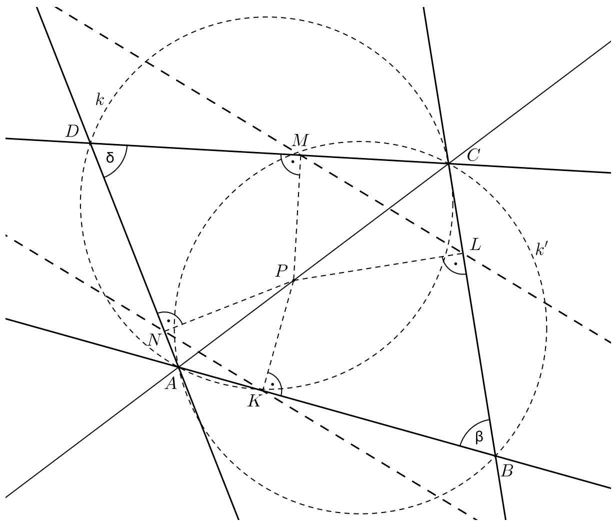
Obr. 11 Bod P leží na jiném oblouku kružnice m

Platí

$$|\sphericalangle APC| = \delta_3 + \delta_4 - |\sphericalangle LPK| = \delta_3 + \delta_4 - 180^\circ + \beta =$$
$$= 180^\circ - \delta - 180^\circ + \beta = \beta - \delta.$$

Hledanou množinou bodů bude kružnice m, procházející body A a C, kromě bodů A, C, jak se můžeme též přesvědčit použitím software dynamické geometrie GeoGebra.

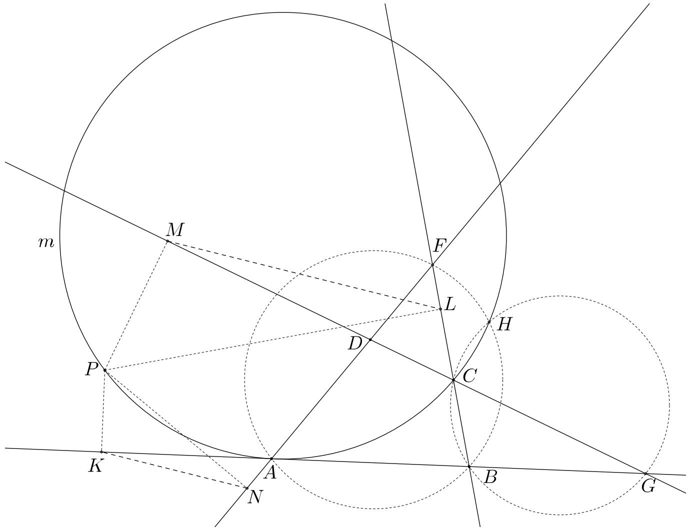
Nyní předpokládejme, že pro (orientované) úhly čtyřúhelníka $ABCD$ platí $\beta = \delta$. Potom ze vztahu (3) plyne rovnost $|\sphericalangle APC| = 180^\circ$. V tomto případě je hledanou množinou bodů přímka AC kromě bodů A, C. Označme k' kružnici, procházející vrcholy A, B, C. Jsou-li vrcholy A, B, C pevně dány, potom vrchol D leží na kružnici k, která je osově souměrná s kružnicí k' v osové souměrnosti s osou AC (obr. 12).



Obr. 12 Pro čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí $\beta = \delta$ je hledanou množinou bodů přímka AC bez bodů A, C

Tato úloha souvisí též s předcházející úlohou (problém 1). Situace, kdy paty kolmic z bodu P k přímkám a, b, c, d jsou kolineární, nastane právě tehdy, když rovnoběžky KN a LM z problému 2 splynou, tj. pokud P je

Miquelův bod čtyřúhelníku $ABCD$. Tento způsob dává i jinou možnost konstrukce kružnice m v předcházející úloze (obr. 13).



Obr. 13 Kružnice m prochází body A, C a Miquelovým bodem H

Následující úloha je speciálním případem obecnějšího problému:

Mějme čtyři libovolné přímky v prostoru. Nalezněte množinu bodů P takových, že paty kolmic z bodu P k těmto přímkám budou ležet v jedné rovině.

Řešení závisí na vzájemné poloze těchto přímek. V obecném případě je hledanou množinou kubika, tedy plocha, jejíž analytickým vyjádřením je polynom třetího stupně. Ačkoli pro konkrétní příklad umíme úlohu vyřešit analyticky, existují tzv. syntetické („zdůvodňující") otázky, na které dosud nejsou známy odpovědi. Autoři řešili následující speciální případ:

V prostoru jsou dány čtyři mimoběžné přímky, které jsou všechny rovnoběžné s danou rovinou. Najděte množinu bodů P takových, že paty kolmic z bodu P k daným přímkám leží v jedné rovině.

Po analytickém výpočtu (např. v programu Maple nebo CoCoA) se ukáže, že hledanou množinou je rotační válcová plocha kolmá na rovinu, s níž jsou přímky rovnoběžné. Není těžké dokázat, že pokud podmínkám zadání vyhovuje určitý bod, vyhovuje mu pak celá přímka, která je kolmá k dané rovině a prochází tímto bodem. Otázka se tedy redukuje: proč průnik hledané množiny bodů s danou rovinou tvoří kružnici?

Lze podat jednoduché syntetické řešení pro dva speciální případy:

Pokud jsou právě 3 přímky různoběžné a čtvrtá mimoběžná (přitom všechny rovnoběžné s danou rovinou), pak se úloha redukuje na S–W větu. Stačí totiž, aby paty kolmic ke třem různoběžným přímkám ležely na jedné přímce. Tato přímka pak společně s patou kolmice ke čtvrté přímce leží v jedné rovině. Řešením je tedy kružnice opsaná trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří průsečíky tří různoběžek.

Druhý případ jsou dvě a dvě různoběžné přímky (jinými slovy, dvě přímky leží v jedné rovině a druhé dvě leží v jiné, rovnoběžné rovině). Označme tyto přímky a, b, c, d a paty kolmic z bodu P k těmto přímkám po řadě K, L, M, N. Dále předpokládejme, že jednu dvojici různoběžek tvoří přímky a, d a druhou dvojici b, c. Leží-li body K, L, M, N v jedné rovině, leží v této rovině i spojnice bodů K, N a L, M. Tyto přímky však nemají společný bod (protože leží v rovnoběžných rovinách). Kdy tedy mohou ležet v jedné rovině? Pouze pokud jsou rovnoběžné a to vede na vyřešený problém 2.

Konstrukční řešení kružnice pro čtyři libovolné mimoběžky není dosud autorům známo.

Literatura

[1] *Berger, M.*: Geometry I, II. Springer, Berlin–Heidelberg, 1987.

[2] *Bogomolny, A.*: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Simpson.shtml.

[3] *Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L*: Geometry Revisited. Toronto–New York, 1967.

[4] *Guzmán, M.*: An Extension of the Wallace–Simson Theorem: Projecting in Arbitrary Directions. Amer. Math. Monthly, roč. 106 (1999), s. 574–580.

[5] http://www.pballew.net/miquel.html.

[6] *Johnson, R.*: Advanced Euclidean Geometry. Dover, New York, 1960.

[7] *Miquel, A.*: Mémoire de Géométrie. J. de Mathématiques Pures at Appliquées, roč. 1 (1838), s. 485–487.

[8] *Pech, P. – Skříšovský, E.*: On the Simson–Wallace theorem. South Bohemia Mathematical Letters, roč. 21 (2013), s. 59–66.

[9] *Riegel, M.*: Simson's Theorem. https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/riegelmj.pdf.

[10] *Steiner, J.*: Questions proposées. Théoréme sur le quadrilatére complet. Annales de Mathématiques, roč. 18 (1827/1828), s. 302–304.

[11] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

[12] http://mathworld.wolfram.com/SimsonLine.html.