Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování dalších nových úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 7. 2013 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 193

Dokažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2, \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z a reálnými parametry a, b má reálné řešení, právě když platí

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq \sqrt{3}.$$

Jaroslav Švrček

Úloha 194

Žáci dostali za domácí úkol zvolit si tři kladná reálná čísla, pak vypočítat podíly libovolných dvou z nich, přičíst k nim třetí číslo a všech šest možných výsledků napsat do sešitu. Petr vypočítal čísla $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 4, \frac{20}{3}$. Pan učitel se podíval na Petrovy výsledky a řekl, že má ve výpočtu chybu. Petr znovu zopakoval výpočty (teď už správně) a zjistil, že v jedné hodnotě opravdu chybu udělal. Jak mohl pan učitel bez znalosti tří Petrových čísel zjistit, že Petr udělal chybu? Se kterými čísly Petr počítal?

Pavel Calábek

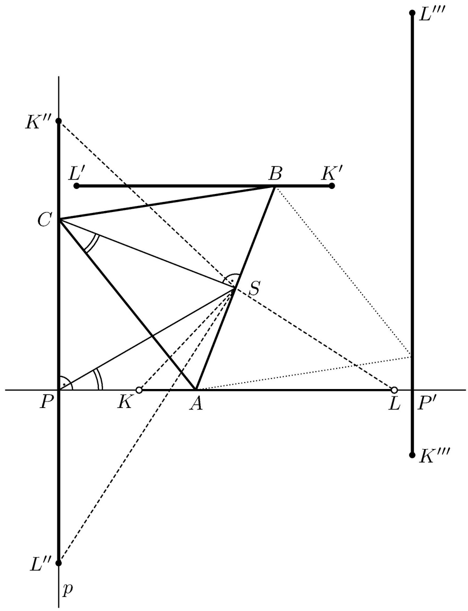
Dále uvádíme řešení úloh 187 až 190, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém a devátém čísle předešlého (21.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 187

Je dána úsečka KL a bod S, který na ní neleží. Najděte množinu všech vrcholů B a C rovnostranných trojúhelníků ABC takových, že $A \in KL$ a S je středem AB.

Šárka Gergelitsová

Řešení. Nechť A je bodem úsečky KL, potom bod B je bodem úsečky $K'L'$ souměrně sdružené s úsečkou KL podle středu S. A naopak, ke každému bodu B úsečky $K'L'$ existuje bod A, pro který je S středem úsečky AB.



Označme P patu kolmice z vrcholu C k přímce KL. Bod S je patou výšky trojúhelníku ABC z vrcholu C a body S, A, P, C tak leží podle Thaletovy věty na téže kružnici. Navíc podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly SPA a SCA shodné a mají velikost 30°. Přímka SP proto svírá s přímkou KL úhel 30°. Vrchol C rovnostranného trojúhelníku ABC tak bude ležet na kolmici p k přímce KL, která prochází bodem P, který je průsečíkem přímky procházející bodem S a svírající s přímkou KL úhel 30°. Takové body existují dva (v případě, že bod S bude bodem přímky KL to bude jeden bod $P \equiv S$), uvažujme například bod P podle obrázku. Potom C bude bodem úsečky $K''L'' \subset p$, kde úhly $L''SL$ a $K''SK$ jsou pravé.

Naopak, nechť C je bodem úsečky $K''L''$. Potom kolmice k přímce CS protne úsečku KL v jejím bodě A a podle věty o obvodovém úhlu bude velikost úhlu ACS rovna 30°. Podobnou úvahu můžeme provést pro druhý průsečík P' přímky procházející bodem S a svírající s přímkou KL úhel 30° a dostaneme tak úsečku $K'''L'''$ (která je souměrná s úsečkou $K''L''$ podle bodu S).

Množina všech vrcholů B rovnostranných trojúhelníků ABC ze zadání je úsečka $K'L'$, která je souměrná s úsečkou KL podle středu S a množina všech vrcholů C je sjednocení souměrně sdružených úseček $K''L''$ a $K'''L'''$.

Poznámka. Uvedený důkaz se dá podstatně zkrátit, když si uvědomíme, že bod C je obrazem složení otočení o 90° se středem S a stejnolehlosti s tímto středem a koeficientem $\sqrt{3}$ (tzv. *spirální podobnost*). Proto úsečka $K''L''$ resp. $K'''L'''$ je obrazem úsečky KL v této spirální podobnosti.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 188

Najděte všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel takové, že každé z čísel a, b, c je dělitelem čísla $a + b + c$.

Robert Geretschläger (*Graz*)

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a \le b \le c$. Jelikož c je dělitelem čísla $a + b + c$, je také dělitelem čísla $a + b \le 2c$. Proto platí buď $a + b = 2c$, nebo $a + b = c$. Oba případy posoudíme samostatně.

V případě $a + b = 2c$ z nerovnosti $a \le b \le c$ plyne $a = b = c$. Trojice (a, a, a), kde a je libovolné přirozené číslo, zřejmě zadání vyhovuje, jak snadno ověříme zkouškou.

Nyní předpokládejme, že $c = a+b$. Protože b je dělitelem čísla $a+b+c$, je také dělitelem čísla $a + c = 2a + b$, a tedy i dělitelem čísla $2a$. Z nerovnosti

$a \leq b$ plyne buď $a = b$, nebo $a = 2b$. Pro libovolné přirozené číslo a v prvním případě zkouškou ověříme, že trojice $(a, a, 2a)$ vyhovuje zadání. Podobně ve druhém případě ověříme, že trojice $(a, 2a, 3a)$ také vyhovuje zadání.

Úloha má řešení 10 typů. Pro libovolné přirozené číslo a jsou řešeními trojice (a, a, a), $(a, a, 2a)$, $(a, 2a, a)$, $(2a, a, a)$, $(a, 2a, 3a)$, $(a, 3a, 2a)$, $(2a, a, 3a)$, $(2a, 3a, a)$, $(3a, a, 2a)$, $(3a, 2a, a)$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 189

Nechť ABC je libovolný ostroúhlý trojúhelník. Označme D, E, F paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C. Dále nechť K, L, M jsou průsečíky kružnice opsané trojúhelníku ABC s přímkami AD, BE, CF (různými od A, B, C). Dokažte, že platí

$$\min\left\{\frac{|KD|}{|AD|}, \frac{|LE|}{|BE|}, \frac{|MF|}{|CF|}\right\} \leq \frac{1}{3}.$$

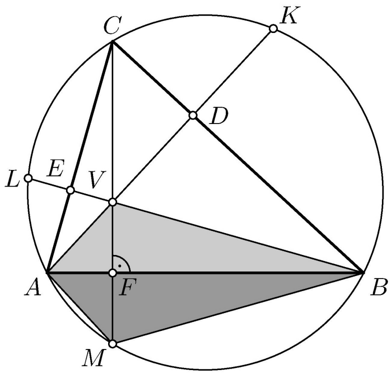
Jaroslav Švrček

Řešení. Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Podle známého tvrzení platí, že obrazy bodu V v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA leží na kružnici danému trojúhelníku opsané. Tyto obrazy jsou po řadě M, K, L. Trojúhelníky ABV a ABM jsou shodné, mají proto stejné obsahy, proto pro obsahy S_{ABV} a S_{ABC} trojúhelníků ABV a ABC platí

$$\frac{S_{ABV}}{S_{ABC}} = \frac{|VF|}{|CF|} = \frac{|MF|}{|CF|}.$$

Podobně platí

$$\frac{S_{BCV}}{S_{ABC}} = \frac{|VD|}{|AD|} = \frac{|KD|}{|AD|} \qquad \text{a} \qquad \frac{S_{CAV}}{S_{ABC}} = \frac{|VE|}{|BE|} = \frac{|LE|}{|BE|}.$$



Součtem levých stran těchto tří rovností tak dostaneme

$$\frac{S_{ABV}}{S_{ABC}} + \frac{S_{BCV}}{S_{ABC}} + \frac{S_{CAV}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABV} + S_{BCV} + S_{CAV}}{S_{ABC}} = 1.$$

Proto platí i

$$\frac{|KD|}{|AD|} + \frac{|LE|}{|BE|} + \frac{|MF|}{|CF|} = 1.$$

Jelikož každý ze sčítanců na levé straně této rovnosti je kladné číslo, plyne odtud platnost dokazovaného tvrzení

$$\min\left\{\frac{|KD|}{|AD|}, \frac{|LE|}{|BE|}, \frac{|MF|}{|CF|}\right\} \leq \frac{1}{3},$$

čímž je důkaz ukončen.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

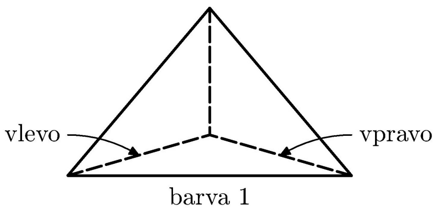
Úloha 190

Petrova stavebnice obsahuje 6 shodných tyčinek 6 různých barev. Kolik navzájem různých modelů pravidelného čtyřstěnu z ní může Petr postavit?

(Dva modely považujeme za shodné, jestliže je můžeme otočit tak, aby se barvy jejich odpovídajících hran shodovaly.)

Pavel Calábek

Řešení. Použité barvy očíslujme $1, 2, \ldots, 6$. Nejprve zafixujeme polohu daného čtyřstěnu. Položme tento čtyřstěn na stůl tak, že hrana s barvou 1 leží na podložce vepředu (obr.).



Pokud hrana s barvou 2 nemá s hranou barvy 1 společný vrchol, můžeme čtyřstěn otočit tak, že hrana s barvou 3 leží na stole. Potom leží buď vpravo nebo vlevo a čtyřstěn je umístěn jednoznačně. Proto pro každou polohu hrany s barvou 3 existuje 3! možností, jak obarvit zbývající tři hrany. Celkem tedy existuje $2 \cdot 3! = 12$ obarvení čtyřstěnu takových, že hrany s barvou 1 a 2 nemají společný vrchol.

Jestli hrana s barvou 2 má společný vrchol s hranou barvy 1, otočme čtyřstěn tak, aby tato hrana ležela na podložce. Potom opět může ležet vpravo nebo vlevo a čtyřstěn je tímto umístěním fixován. Pro každou polohu hrany 2 tak existuje 4! možností, jak obarvit čtyři zbývající hrany. Celkem existuje $2 \cdot 4! = 48$ možností, jak obarvit hrany čtyřstěnu tak, že hrany s barvami 1 a 2 mají společný vrchol.

Dohromady tedy existuje $12 + 48 = 60$ různých možností, jak obarvit hrany čtyřstěnu 6 barvami. Petr tak může ze šesti tyčinek různých barev složit 60 různých modelů pravidelného čtyřstěnu.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Pavel Calábek