Zajímavé matematické úlohy

V další části pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 225

Určete počet všech uspořádaných šestic (a, b, c, d, e, f) přirozených čísel, jejichž součet je 2 016, a přitom všechny zlomky

$$\frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b+c}{d+e}, \quad \frac{c+d}{e+f}, \quad \frac{d+e}{f+a}, \quad \frac{e+f}{a+b}, \quad \frac{f+a}{b+c}$$

mají celočíselné hodnoty.

Jaroslav Švrček

Úloha 226

Na každém poli šachovnice 10×10 sedí jedna blecha. Po tlesknutí přeskočí každá blecha ve směru řádku nebo sloupce právě jedno pole a dopadne opět na šachovnici. Poté na některých polích šachovnice bude několik blech a některá pole zůstanou prázdná. Určete nejmenší možný počet prázdných polí.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 221 a 222, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (25.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 221

Najděte všechny dvojice číslic X a Y desítkové soustavy takové, že pro čísla a, b, c, d ve tvaru

$$a = \overline{2X83}, \qquad b = \overline{19Y6}, \qquad c = \overline{29X6}, \qquad d = \overline{1Y54}$$

jsou obě čísla $a + b$ a $c - d$ dělitelná třemi.

Stanislav Trávníček

Řešení. Číslo a jeho ciferný součet dávají stejný zbytek při dělení třemi. Proto číslo a dává zbytek $2 + X + 8 + 3 = X + 13$, který je stejný jako zbytek při dělení třemi čísla $X + 1$. Podobně číslo b dává stejný zbytek při dělení 3 jako číslo $Y + 1$, číslo c dává zbytek stejný jako $X + 2$ a číslo d dává zbytek stejný jako $Y + 1$. Číslo $a + b$ je tak dělitelné třemi, právě když je dělitelné třemi i číslo

$$(X + 1) + (Y + 1) = X + Y + 2.$$

Podobně $c-d$ je dělitelné třemi, právě když je třemi dělitelné i $X-Y+1$.

Obě čísla $X + Y + 2$ a $X - Y + 1$ jsou zřejmě dělitelná 3 právě tehdy, když jsou dělitelná třemi i čísla

$$(X + Y + 2) + (X - Y + 1) = 2X + 3,$$
$$(X + Y + 2) - (X - Y + 1) = 2Y + 1.$$

Protože X a Y jsou číslice, je číslo $2X+3$ dělitelné třemi pro $X \in \{0, 3, 6, 9\}$ a číslo $2Y + 1$ je dělitelné třemi pro $Y \in \{1, 4, 7\}$.

Existuje tak 12 dvojic číslic (X, Y), která vyhovují zadání: $(0; 1)$, $(0; 4)$, $(0; 7)$, $(3; 1)$, $(3; 4)$, $(3; 7)$, $(6; 1)$, $(6; 4)$, $(6; 7)$, $(9; 1)$, $(9; 4)$, $(9; 7)$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

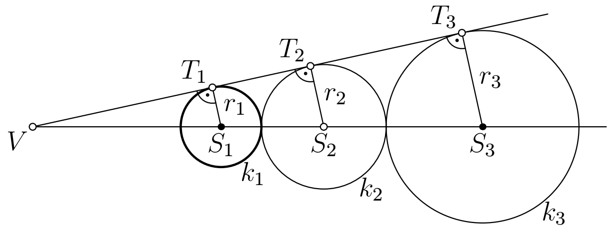
Úloha 222

Je dána kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a bod S_3 jejího vnějšku. Sestrojte kružnice $k_2(S_2; r_2)$ a $k_3(S_3; r_3)$ tak, že současně platí: S_2 je bodem úsečky S_1S_3, kružnice k_2 se vně dotýká kružnic k_1 a k_3 a všechny tři kružnice mají společnou vnější tečnu.

Šárka Gergelitsová

Řešení. Jestliže společná vnější tečna všech tří kružnic je rovnoběžná s přímkou S_1S_3, potom poloměry všech tří kružnic jsou shodné a bod S_2 je středem úsečky S_1S_3. Tato situace nastane právě tehdy, když $|S_1S_3| = 4r_1$. Dále předpokládejme, že $|S_1S_3| \neq 4r_1$.

Nechť V je průsečík společné vnější tečny s přímkou S_1S_3, bez újmy na obecnosti nechť leží na polopřímce opačné k polopřímce S_1S_3. Označme body dotyku jednotlivých kružnic se společnou vnější tečnou podle obr. 1 T_1, T_2 a T_3.



Obr. 1

Ze zřejmých rovností

$$|S_1S_2| = r_1 + r_2 \quad \text{a} \quad |S_1S_3| = r_1 + 2r_2 + r_3$$

plyne

$$r_2 = |S_1S_2| - r_1 \quad \text{a} \quad r_3 = |S_1S_3| - 2|S_1S_2| + r_1.$$

Z podobnosti (pravoúhlých) trojúhelníků VS_1T_1, VS_2T_2 a VS_3T_3 dostáváme

$$\frac{r_1}{|VS_1|} = \frac{r_2}{|VS_2|} = \frac{r_3}{|VS_3|},$$

tedy

$$\frac{r_1}{|VS_1|} = \frac{|S_1S_2| - r_1}{|VS_1| + |S_1S_2|} = \frac{|S_1S_3| - 2|S_1S_2| + r_1}{|VS_1| + |S_1S_3|}.$$

Odtud již ze známé implikace

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k\right) \Rightarrow \left(k = \frac{a-c}{b-d}\right)$$

plyne

$$\frac{(|S_1S_2| - r_1) - r_1}{(|VS_1| + |S_1S_2|) - |VS_1|} = \frac{(|S_1S_3| - 2|S_1S_2| + r_1) - r_1}{(|VS_1| + |S_1S_3|) - |VS_1|},$$

tedy

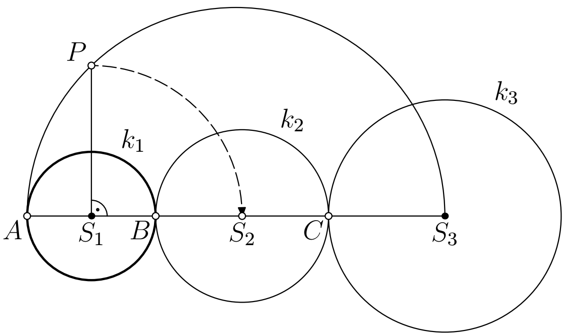
$$\frac{|S_1S_2| - 2r_1}{|S_1S_2|} = \frac{|S_1S_3| - 2|S_1S_2|}{|S_1S_3|}.$$

(Stejnou rovnost bychom získali i v případě, leží-li bod V na polopřímce opačné k polopřímce S_3S_1.) Snadnou úpravou tohoto vztahu pak dostaneme

$$|S_1S_2|^2 = r_1\,|S_1S_3|.$$

Protože r_1 a $|S_1S_3|$ jsou známé hodnoty, vzdálenost $|S_1S_2|$ snadno sestrojíme pomocí Eukleidovy věty o výšce. Po sestrojení bodu S_2 je další konstrukce zřejmá:

Označme $A \neq B$ průsečíky přímky S_1S_3 s kružnicí k_1, přičemž bod B je bodem úsečky S_1S_3. Sestrojíme polokružnici s průměrem AS_3 a její průsečík s kolmicí k přímce S_1S_3 procházející bodem S_1 označíme P (potom $|S_1P| = \sqrt{r_1\,|S_1S_3|}$). V otočení se středem S_1 bodu P na úsečku S_1S_3 dostaneme bod S_2. Sestrojíme kružnici $k_2(S_2; |S_2B|)$ a její průsečík s přímkou S_1S_2 různý od B označíme C. Nakonec sestrojíme kružnici $k_3(S_3; |S_3C|)$ (obr. 2).



Obr. 2

Správnost této konstrukce plyne z diskuse a úloha má jediné řešení, přičemž výše uvedená konstrukce je správná i v případě $|S_1S_3| = 4r_1$.

Poznámka. Dvojice kružnice k_2 a k_1 resp. k_3 a k_2 jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě V a totožným koeficientem, případně jsou stejnolehlé se stejným koeficientem a středy stejnolehlosti v bodech B resp. C.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek

* * *

Upozorňujeme učitele matematiky, že na webových stránkách MFI je uveřejněno plné znění úloh I. kola 66. ročníku Matematické olympiády (domácí část), kategorie A, B a C.