MATEMATIKA

Pojem vzdálenosti v geometrii

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Nevíme, zda to byl úmysl nebo náhoda, záměr nebo nedopatření, že slova *měřiti* a *měření* se nevyskytují ve Standardech [5], materiálech, které jsou od r. 2013 závaznou přílohou *Rámcových vzdělávacích programů základního vzdělání*. Ať tak, či onak, je to podle našeho názoru projevem vědomé či nevědomé tendence nerespektovat „nečistý“ proces vznikání matematických pojmů a postupů, ale orientovat se na hotovou „čistou“ matematiku. A to navzdory tomu, co napsal klasik matematiky *Henri Poincaré* (1842–1912) a co zdůrazňují současní filosoficky orientovaní autoři *Marie Benediktová Větrovcová* a *Pavel Krtouš*. Dovolíme si připomenout jejich slova.

„Zoologové říkají, že embryonální vývoj zvířete opakuje ve velmi krátké době celé dějiny jeho předků v rozsahu geologických období. Zdá se, že je tomu stejně s vývojem rozumu. Učitel musí nechat projít žáka tím, čím prošli jeho předci. Rychle, ale bez vynechání některé etapy. K tomu pak nám mají být prvním vodítkem dějiny vědy“ [8, s. 33]. „Není tvoření osnov, tohoto plánu, jak vytyčit cestu ontogenezi matematiky, součástí širšího fylogenetického plánu daného evolučním procesem, rozumějme procesem povstávání a vznikání matematiky jako takové? Lze nahlížet na vzdělávání v matematice jako na dějinami matematiky nastíněnou (evoluční) větev, která vyrůstá na základě jakýchsi skrytých předpokladů, jak se matematika sama o sobě vyvíjí a jak na ni máme pohlížet?“ [1, s. 173]. „První matematické teorie – geometrie, aritmetika a elementární teorie čísel – vznikaly při snaze porozumět našemu světu. Vznikaly jako nástroj přímočaře použitelný na jevy okolního světa. Geometrické poučky jako podobnost trojúhelníků či Pythagorova věta nevznikaly jako výplody práce abstraktní matematiky, ale jako nástroj pro vyměřování reálných útvarů. Jejich pravdivost nebyla prvotně založena na dokazatelnosti z nějakých axiomů, ale na tom, že fungovaly při aplikaci na reálný svět. Stejně tak tomu bylo s čísly. Axiomatická metoda přišla do teorie čísel až dávno poté, co jsme čísla pochopili a porozuměli mnoha jejich vlastnostem. Právě porovnáním matematických teorií se zkušenostním světem jsme získali pocit, že matematické výroky nesou obsah, že je lze pravdivostně ocenit“ [6, s. 69].

Cílem tohoto článku je připomenout několik možných přístupů k důležitému pojmu vzdálenost v matematické literatuře. V navazujícím článku *Pojem vzdálenosti ve školské matematice* se pak vrátíme k procesu měření délek a ukážeme několik aplikací pojmu vzdálenost ve vyučování na základní a střední škole.

Obsah i metody vyučování matematice jsou v praxi často ovlivněny hotovými matematickými strukturami, někdy dokonce i axiomatickými systémy. Matematické vzdělávání, které respektuje historický vývoj matematiky, je praktikováno např. v projektu realistické matematiky *Freudenthalova ústavu* v Utrechtu. Podrobněji o tom píšeme v publikaci [7]. Východiskem realistického přístupu je předpoklad, že žáci mohou a měli by sami rozvíjet matematické představy na základě praktických zkušeností a problémů. Ideu dvojího přístupu k matematice podrobně rozebírá *Petr Vopěnka* (1936–2015) v novém vydání *Eukleidových Základů* [3] v kapitole *Napínači provazů.* Tato praktická geometrie (měřictví) byla provozována dávno před Eukleidem. Napínači provazů nezkoumali ideální geometrický svět. Pohybovali se ve světě reálném, základem jejich práce bylo měření vzdáleností jako podklad pro výpočet obsahů ploch a objemů těles. Jde tedy o *praktickou moudrost* (phronesis) na rozdíl od *vědeckého porozumění* (epistémé), na němž je založen deduktivní systém *Eukleidových Základů.* Za představitele prvního přístupu lze považovat *Aristotela*, představitel druhého je *Platon.* „Napínači provazů ovládali svoje řemeslo s obdivuhodným mistrovstvím. Považujeme-li měřičství za řemeslo, neznamená to, že bychom mu chtěli upřít tvůrčí povahu. Právě naopak, v řemesle je často více tvůrčí činnosti než ve vědě, neboť tvoření je jeho hlavním úkolem.“ To zdůrazňuje Vopěnka v knize *Rozpravy s geometrií.*

Učebnice geometrie pro jedenáctiletou střední školu z r. 1954 autorů *Jan Vyšín, Zbyněk Dlouhý, Josef Metelka* a *Alois Urban* popisuje proces měření úseček na dvaceti stránkách včetně Archimedova axiomu a naznačení konstrukce velikosti úsečky jako reálného čísla, které může být i iracionální.

Současná učebnice planimetrie pro gymnázia *Evy Pomykalové* proces měření úseček vůbec nezmiňuje, pouze připomíná, že délka úsečky AB je vzdálenost bodů A, B.

Jan Vyšín v *Elementární geometrii*, učebnici planimetrie pro budoucí učitele, vyslovuje v kapitole *Velikost úseček a úhlů definici*:

Budiž každé úsečce přiřaděno jediné nezáporné číslo. Toto číslo budeme nazývat velikostí (délkou) úsečky, jsou-li splněny tyto podmínky:

1. Shodné úsečky mají stejné velikosti.
2. Součet úseček má za velikost součet velikostí jednotlivých úseček.
3. Určitá předem daná nenulové úsečka má velikost 1.

V dalším pak na pěti stranách dokazuje jednoznačnost a existenci velikosti úsečky ve tvaru reálného čísla $n,n_1n_2n_3\ldots n_k\ldots$, přičemž se odvolává na teorii nekonečných řad.

To je „nejpoctivější" zpracování tematiky velikosti úsečky v české literatuře, které je mně známé. Složitý přístup k takto základnímu pojmu elementární geometrie je podle mého názoru důsledkem eukleidovsko-hilbertovské axiomatiky, jak se v dalším pokusíme prokázat.

Eduard Čech (1893–1960) formuluje ve své učebnici [2] pro základní školu přístup k délce úsečky takto: „Délku úsečky AB najdeme měřítkem. Přiložíme měřítko tak, aby se jeho začátek kryl třeba s bodem A, délku potom čteme u bodu B." Tento přístup považuji za velmi vhodný, neboť délka úsečky je určena „přesně" odpovídajícím bodem na měřítku. Při realizaci procesu měření musíme zpravidla zaokrouhlovat. Měříme-li např. na centimetry úsečky AB a CD, které v milimetrech mají po řadě délky 34 mm a 44 mm, platí $|AB| = 3$ cm, $|CD| = 4$ cm a pro jejich součet dostáváme velikost 7 cm, ačkoliv s přesností na milimetry má tento součet velikost 78 mm. Velikost součtů úseček tak není součet velikostí sčítaných úseček.

V Eukleidových Základech vydaných česky v roce 1907 a nově pak v roce 2007 má *délka*, spolu s *šířkou* a *dílem*, které jsou složkami praktické geometrie předeukleidovské éry, charakter primitivních, nedefinovaných pojmů. Píše se zde např.: „Bod jest, co nemá dílu. Čára je délka bez šířky. Hranicemi čáry jsou body. Úsečka je čára, která se svými body táhne rovně" [3, s. 41]. Ačkoliv pro praktickou geometrii a geometrii v současném pojetí je délka úsečky číslo získané měřením, jak jsem připomněl Vyšínovým zpracováním, u Eukleida je tento pojem reprezentován úsečkou. Nahrazení měřené délky (tedy čísla) úsečkou (geometrickým útvarem) popisuje explicitně *J. B. Pavlíček* v knize *Základy neeukleidovské geometrie Lobačev-*

ského: „Vzdáleností dvou bodů budeme rozumět každou úsečku shodnou s úsečkou spojující oba body.“ Toto sepětí měřené délky s číslem je snad nejlépe možné vyjádřit číselnou osou (měřítkem), jak jsem připomněl citací Čechovy učebnice. V deskriptivní geometrii a mnohdy i ve stereometrii je tento přístup běžný: délku úsečky umístěné v prostoru určíme např. sklopením promítacího lichoběžníku nebo „přenesením“ geometrického útvaru do roviny, tedy nikoliv měřením nebo výpočtem. Řadu příkladů tohoto postupu si čtenář snadno vyhledá v gymnaziálních učebnicích deskriptivní geometrie a stereometrie *Evy Pomykalové*.

Na úrovni matematiky dvacátého století zpracoval eukleidovskou geometrii německý matematik *David Hilbert* v knize *Grundlagen der Geometrie* z r. 1899. Hilbert rozlišil pět skupin axiomů (axiomy incidence, uspořádání (rozmístění), shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti). Pojem vzdálenost se v Hilbertově axiomatice nevyskytuje. Zavedení vzdálenosti v takto budované geometrii jsem již připomněl ve Vyšínově zpracování. Tato problematika je dosti složitá a nelze se divit, že řada autorů hledala k vzdálenosti „schůdnější“ cestu.

Již v r. 1902 se snažil zavést axiomatiku s primitivním pojmem vzdálenost ruský matematik *Venjamim Fedorovič Kagan* (1869–1853). Patrně pod silným vlivem hilbertovského přístupu se toto pojetí uplatnilo až po zavedení pojmu metrický prostor, který r. 1906 definoval francouzský matematik *Maurice Fréchet* takto:

Množina P spolu se zobrazením d se nazývá metrický prostor, právě když každým dvěma prvkům $X, Y \in P$ je přiřazeno reálné číslo $d(X, Y)$ splňující tyto axiomy:

A_1: $\forall X, Y \in P \quad d(X, Y) \geq 0$,

A_2: $\forall X, Y \in P \quad d(X, Y) = d(Y, X)$,

A_3: $\forall X, Y, Z \in P \quad d(X, Y) + d(Y, Z) \geq d(X, Z)$.

Dnes je tento pojem všeobecně přijímán. Geometrické útvary chápeme jako části metrických prostorů dimenze 2 nebo 3, tedy ne jako „pouhé množiny“, ale složky struktury $[P, d]$. Představu o úsečce jako množině malých korálků navlečených na niti, která se někdy doporučuje, bychom pěstovat neměli. Body úsečky nebo roviny bychom měli interpretovat spíše jako „místa“ na rovné čáře nebo v rovném terénu bez překážek. Dokonce i klasický termín „geometrické místo bodů“, který byl v éře množinové matematiky zavržen, není nevhodný.

Vzdálenost jako primitivní pojem geometrické axiomatiky zavedl americký matematik *George D. Birkhoff* v roce 1932. Obvyklé formulace příslušných axiomů zní:

Axiom vzdálenosti: Každé dva body A, B mají určitou vzdálenost $|AB|$, která je dána nezáporným reálným číslem.

Axiom měřítka: Existuje bijektivní zobrazení f množiny bodů libovolné přímky p na množinu všech reálných čísel tak, že pro libovolné body A, B přímky p platí $|AB| = |f(B) - f(A)|$.

Takový přístup můžeme nalézt např. v pracích *Gustava Choqueta*, *Alexeje Vasiljeviče Pogorelova* a *Anny Zofie Krygowské.*

Vzdálenost je důležitým pojmem elementární geometrie. Určování vzdáleností měřením dalo nejen název této disciplíně v historii; tento pojem je významný i v současné matematice, jak jsem připomněl definicí metrického prostoru. Snad vlivem poněkud akademického stylu v pojetí Eukleides–Hilbert se mu dostává v současné škole relativně malá pozornost. K této problematice se vrátím v samostatném článku. Myšlenky naznačené v úvodu tohoto příspěvku by měly ovlivňovat praxi vyučování směrem k činnostem, k experimentování, rýsování a modelování. Může to přinést prohloubení zájmu o matematiku u těch žáků, kteří jsou spjati s konkrétní realitou svých světů a abstraktní myšlení jim dělá potíže. Matematika by pro tyto žáky měla mít spíše charakter řemesla, než abstraktní teorie, kterou se v některých případech učí bez hlubšího porozumění.

Literatura

[1] *Benediktová Větrovcová, M.*: Zrození aritmetického a algebraického kalkulu. In: Spor o matematizaci světa. Pavel Mervart, Červený Kostelec, 2011.

[2] *Čech, E.*: Geometrie pro I. tř. měšťanských a středních škol. JČMF, Praha, 1947.

[3] *Eukleides*: Základy. Kniha I–IV. OPS, Nymburk, 2007.

[4] Eukleidovy Základy. JČM, Praha 1907.

[5] *Fuchs, E., Hrubý, D. a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Prometheus, Praha, 2000.

[6] *Krtouš, P.*: Pravdivost v matematice a zkušenost. In: Spor o matematizaci světa. Pavel Mervart, Červený Kostelec, 2011.

[7] *Kuřina, F.*: Matematika jako pedagogický problém. Gaudeamus, Hradec Králové, 2016.

[8] *Poincaré, H.*: Číslo, prostor, čas. OPS, Plzeň, 2010.