doby tří let od diagnózy. V analýze této datové sady samozřejmě musí statistik zohlednit i další důležité faktory, které mají či mohou mít vliv na délku přežití pacienta, jako jsou například věk, pohlaví nebo, zda jde o kuřáka či nekuřáka.

Výzkumnou zprávu shrnující zjištěné výsledky se podařilo publikovat v prestižním časopise *International Journal of Cancer* [3]. Předmětem dalšího zkoumání je, zda pacienti HPV pozitivní reagují jinak na různé typy léčby než pacienti HPV negativní. Taková skutečnost by mohla výrazně napomoci v rozhodování o způsobu terapie.

Literatura

[1] *Calda, E. – Dupač, V.*: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus, Praha, 2006.

[2] *Kahneman, D.*: Myšlení rychlé a pomalé. Jan Melvil Publishing, Brno, 2012.

[3] *Vojtěchová, Z. a kol.*: Analysis of the integration of human papillomaviruses in head and neck tumours in relation to patients' prognosis. International Journal of Cancer, roč. 138 (2016), č. 2, s. 386–395.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 227 a 228 můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 227

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, pro jehož odvěsny platí nerovnost $|AC| > |BC|$. Nechť D je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB a E, F nechť značí po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům BDC, ADC. Dokažte, že průsečík P osy vnitřního úhlu při vrcholu A a přímky EF je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE.

Jaroslav Švrček & Waldemar Pompe (*Warszawa*)

Úloha 228

Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ $(ac \neq 0)$, pro něž jsou

$$\overline{ab} + \overline{cd}, \quad \overline{ab} - \overline{cd}, \quad (\overline{ab} + \overline{cd})/(\overline{ab} - \overline{cd}) \quad \text{a} \quad a + b + c + d$$

druhými mocninami některých přirozených čísel.

Radek Horenský

Dále uvádíme řešení úloh 223 a 224, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 223

V krabici bez víka s výškou 1 a s půdorysným rozměrem $m \times n$ (m, n jsou přirozená čísla) bylo uloženo mn dřevěných kostek (jednotkových krychlí). Nina si chtěla s kostkami hrát, když však otočila krabici krabici dnem vzhůru, žádné kostky z ní nevypadly, protože byly v krabici „natěsno“ a pevně je držely stěny krabice. Nina poté vytáhla z krabice několik kostek. Když opět krabici otočila, s překvapením zjistila, že z ní opět žádné kostky nevypadly, protože každá kostka v krabici byla v některém řádku nebo sloupci, ve kterém žádná kostka nechyběla a stěny krabice tento řádek nebo sloupec stále udržely. Určete, kolika způsoby mohla Nina takto kostky z krabice vytáhnout.

Peter Novotný

Řešení. Ke každému výběru kostek ze zadání existuje (jednoznačně) množina sloupců a řádků, které zůstaly „natěsno“ (neporušené). Naopak ke každému výběru sloupců a řádků, které mají zůstat neporušené, existuje (kromě výběru všech sloupců (resp. řádků), kdy musí zůstat neporušené i všechny řádky (sloupce)) jednoznačný výběr kostek, které musí Nina vytáhnout, aby právě vybrané řádky a sloupce zůstaly neporušené (průnik porušených řádků s porušenými sloupci). Počet všech možností, jak vybrat aspoň jeden porušený řádek a sloupec, je

$$(2^m - 1)(2^n - 1).$$

K tomu ještě přidáme možnost, že neporušené zůstanou všechny sloupce a řádky. Celkový počet možností, jak může Nina vytáhnout kostky, je tedy roven

$$(2^m - 1)(2^n - 1) + 1.$$

Poznámka. Přestože se někteří řešitelé dopustili chyb, když neuvažovali (přípustné) možnosti, že Nina z krabice nevytáhne ani jednu kostku (0 je také považována za několik čísel), popř., že vytáhne všechny kostky (v krabici nezůstane ani jedna kostka, je proto tvrzení o vlastnosti kostek v krabici pravdivé), jejich řešení redakce uznala za správná.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich. Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 224

Najděte všechna přirozená čísla k, pro která existují celá čísla a, b, c taková, že $a+b+c=0$ a současně $|ab|$, $|bc|$, $|ca|$ jsou k-té mocniny přirozených čísel.

Patrik Bak

Řešení. Podle zadání existují přirozená čísla x, y a z taková, že platí

$$|a|\cdot|b|=z^k, \qquad |a|\cdot|c|=y^k, \qquad |b|\cdot|c|=x^k.$$

Řešením této soustavy s neznámými $|a|$, $|b|$, $|c|$ dostaneme

$$|a|=\left(\frac{yz}{x}\right)^{\frac{k}{2}}, \qquad |b|=\left(\frac{xz}{y}\right)^{\frac{k}{2}}, \qquad |c|=\left(\frac{xy}{z}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Protože x, y, z jsou přirozená čísla, zřejmě platí $a,b,c\neq 0$. Odtud a z $a+b+c=0$ zřejmě plyne, že, dvě z čísel mají stejná znaménka a třetí má znaménko opačné. Navíc pro vyhovující trojici (a,b,c) úloze (pro stejné k) vyhovuje i trojice $(-a,-b,-c)$. Bez újmy na obecnosti tak předpokládejme, že $a>0$, $b>0$ a $c<0$. Potom dosazením do $a+b+c=0$ dostaneme

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^{\frac{k}{2}}+\left(\frac{xz}{y}\right)^{\frac{k}{2}}=\left(\frac{xy}{z}\right)^{\frac{k}{2}},$$

což po vynásobení kladným číslem $(xyz)^{\frac{k}{2}}$ dává

$$(yz)^k+(xz)^k=(xy)^k.$$

Užitím Velké Fermatovy věty tato rovnice nemá řešení v oboru přirozených čísel pro $k\geq 3$. Pro $k\in\{1;2\}$ stačí volit $a=9$, $b=16$ a $c=-25$.

Závěr. Úloze vyhovují dvě přirozená čísla, a to $k=1$ a $k=2$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek