Rozumíme dobře Archimedovu zákonu?

BOHUMIL VYBÍRAL

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

K formulaci Archimedova zákona

Archimedův zákon platí za podmínek, pro které byl odvozen, tj. že hydrostatické (event. aerostatické síly) síly působí na celý povrch ponořeného tělesa. Jeho běžně užívaná formulace (viz např. [1], [2]) sice platí ve velké většině vyskytujících se aplikací, avšak existují případy, kdy jeho jednoduché znění může být při formální aplikaci zavádějící. Proto je navržena jeho zpřesněná formulace pro těleso v tekutině (tj. kapaliny a plyny) v tíhovém poli (viz [3]), která poněkud omezuje jeho dosud formulovanou obecnost: *Je-li těleso ponořeno celým svým povrchem do tekutiny, je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost je rovna tíze tekutiny stejného objemu, jako je objem ponořeného tělesa.*

Kriteriem pro použití běžně uváděné (anebo této zpřesněné formulace) tedy je, zda při ponoření tělesa jsou v dotyku s uvažovanou tekutinou všechny jeho ponořené povrchové plochy. Není-li tomu tak, nepůsobí hydrostatické (event. aerostatické) síly na celou povrchovou plochu ponořeného tělesa a problém je nutné řešit individuálně (např. při výpočtu sil působících na ponořený vnitřní uzávěr nádrže, u něhož je část povrchu v dotyku s jiným prostředím, zpravidla vzduchem). Někdy musíme z funkčních důvodů dokonce zabránit působení hydrostatických sil ponořených těles (např. u přehradní hráze je nutné dobře utěsnit její dno; pokud by tomu tak nebylo, způsobilo by to její nadlehčování a tím i její možnou destrukci).

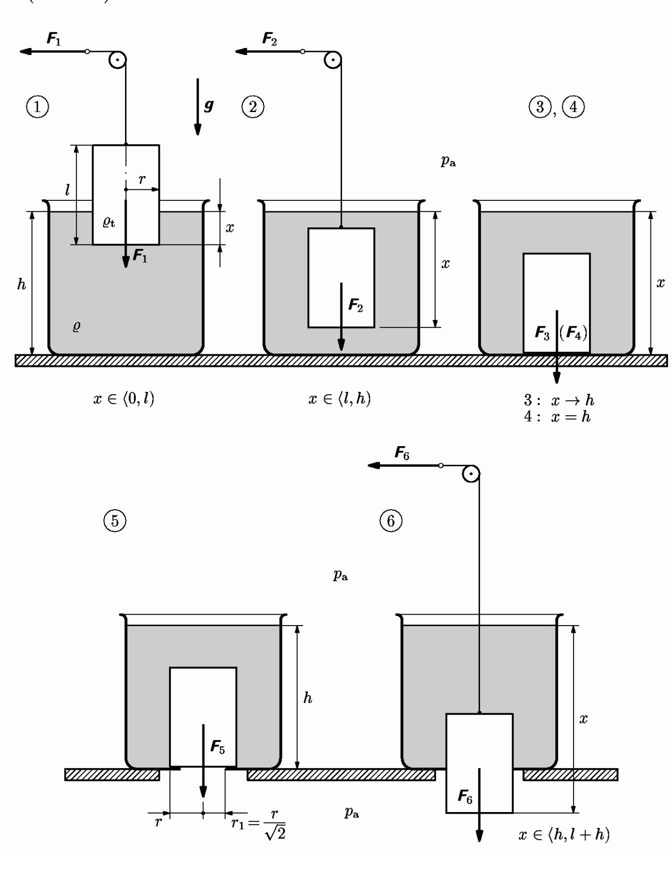
U částečně ponořených těles se při výpočtu vztlakové síly samozřejmě uplatní jen objem a povrch ponořené části, který je v dotyku s uvažovanou tekutinou, tj. té části, na níž působí hydrostatické (event. aerostatické) síly.

Na následujícím prvním příkladu je ukázáno šest různých případů působení vztlakové síly, jejíž přímý výpočet podle formálního původního znění

Archimedova zákona můžeme provést jen v polovině případů. Druhý příklad řeší zmíněnou problematiku sil u přehradní hráze.

První ilustrační příklad – analýza sil u ponořeného válce

Uvažujme homogenní válec ($\varrho_t = 2{,}70 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}) o poloměru $r = 30{,}0$ mm a výšce $l = 70{,}0$ mm a nádobu s vodou ($\varrho = 1{,}00 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}), v níž ve všech sledovaných situacích budeme udržovat hladinu ve stejné výšce $h = 120$ mm ode dna. Atmosférický tlak uvažujme $p_a = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Válec nechť se nachází ve vztahu k nádobě v šesti různých situacích (obr. 1):



Obr. 1 K analýze sil působících na válec v kapalině

1. Válec je pomocí lanka částečně ponořen do nádoby, přičemž $x \in \langle 0, l)$.
2. Zavěšený válec je zcela ponořen $x \in \langle 0, h)$.
3. Válec je položen na dno nádoby, přičemž v důsledku drobných nečistot nebo nerovnosti styčných ploch nedosedá dokonale ke dnu.
4. Válec dokonale přiléhá ke dnu (dno je zabroušeno anebo pokryto tmelem).
5. Válec na ploše mezikruží o vnitřním poloměru $r_1 = r/\sqrt{2}$ dokonale přiléhá ke dnu a tvoří uzávěr výtokového otvoru (tento případ je tedy možné považovat za model výpustného ventilu nádrže).
6. Zavěšený válec prochází volně (se zanedbatelným třením) otvorem o poloměru r ve dně nádoby, přičemž jeho plášť těsní výtokový otvor; tloušťka dna je zanedbatelná a $x \in \langle h, h + l)$.

Vypočtěte sily, které v jednotlivých případech působí na válec.

Řešení

1. $F_1 = \pi r^2 (l\varrho_t - x\varrho)g \leq F_G$, $F_{1\max} = \pi r^2 l \varrho_t g = F_G = 5{,}24$ N (pro $x = 0$), $F_{1\min} = \pi r^2 l(\varrho_t - \varrho)g = 3{,}30$ N (pro $x \to l$).
2. Případ se od situace v bodě 1 liší jen tím, že hydrostatický tlak již působí na celý povrch válce a síla má konstantní velikost $F_2 = F_{1\min} = \pi r^2 l(\varrho_t - \varrho)g = 3{,}30$ N.
3. V důsledku netěsného uložení působí hydrostatická tlaková síla i na dno a výsledná síla je stejná jako v bodě 2: $F_2 = F_3 = 3{,}30$ N.
4. V důsledku těsného uložení nemůže působit na spodní podstavu válce hydrostatická tlaková síla ani síla od atmosférického tlaku. Proto $F_4 = \pi r^2 [l\varrho_t g + p_a + (h - l)\varrho g] \gg F_G$, $F_4 = 293$ N.
5. Situace se oproti případu 4 liší tím, že působení atmosférického tlaku se částečně kompenzuje jeho působením u dna na kruhové ploše o poloměru r_1. Pak $F_5 = F_4 - \pi r_1^2 p_a \gg F_G$, $F_5 = 150$ N.
6. $F_6 = F_2 + \pi r^2 \varrho g x > F_G$, $F_{6\max} = F_2 + \pi r^2 \varrho g(h + l) = 8{,}57$ N, $F_{6\min} = F_2 + \pi r^2 \varrho g h = 6{,}63$ N.

Diskuse

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že formální aplikace obecně uváděného znění Archimedova zákona na složitější případy by mohla vést k závažným chybám. Výpočet vztlakové síly v situacích ad 1, 2, 3 je v souhlase s běžně uváděnou formulací Archimedova zákona – je rovna tíze kapaliny stejného objemu, jako je objem ponořené části tělesa. U případů 4, 5, 6 však nebyly splněny podmínky, pro které byl Archimedův zákon takto formulován a nelze jej tedy přímo použít. Pravděpodobně je překvapující i velikost síly vypočtené v těchto případech. U případů 4 a 5 je síla dána nekompenzovaným působením síly od atmosférického tlaku na dně válce. Tato síla se projeví tlakem ve stykové ploše mezi válcem a dnem nádoby.

Druhý ilustrační příklad – analýza sil u přehradní hráze

Betonová přehradní hráz, pro jednoduchost ve tvaru kvádru o výšce $a = 18$ m, tloušťce $b = 4{,}0$ m, šířce $c = 100$ m a hustotě $\varrho_b = 2{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, je výškou $d = 7{,}0$m zapuštěna do tvrdého podloží (obr. 2). Výška vodní hladiny před hrází je $H = 10$ m, za hrází $h = 2{,}0$ m. Hustota vody je $\varrho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, atmosférický tlak $p_\mathrm{a} = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Vypočtěte velikost síly, kterou je hráz ve svislém směru vtlačována do podloží ve dvou mezních případech:

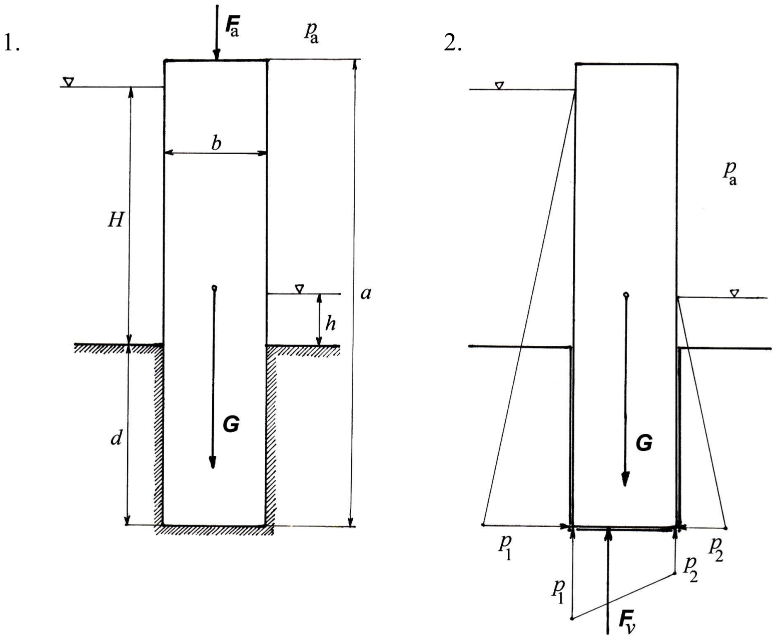
1. hráz je v podloží dokonale utěsněna,
2. hráz dokonale netěsní, tj. mezi hrází a podložím je po celé její délce souvislá (byť tenká) vrstvička vody.

Řešení

1. Ve svislém směru působí tíhová síla o velikosti G a na horní plochu bc síla atmosférického tlaku o velkosti F_a (obr. 2/1). Celková síla ve svislém směru má velikost
$$F_1 = G + F_\mathrm{a} = bc(a\varrho_\mathrm{b} g + p_\mathrm{a}) = 188\ \mathrm{MN}.$$
2. Voda působí na spodní plochu bc vztlakovou silou, která je dána střední hodnotou hydrostatického tlaku z obou stran spodní hrany hráze tj. $(p_1 + p_2)/2$ – viz obr. 2/2. Síla od atmosférického tlaku, která v případě ad 1) činila $F_\mathrm{a} = 40$ MN, je v tomto případě vykompenzována. Atmosférický tlak zde totiž prostřednictvím vody působí

i na spodní stěnu (v prvním případě se uvažuje tvrdé podloží, které tlak spodní stěnu nepřevede). Celková síla tedy je

$$F_2 = G – F_{\mathrm{v}} = bc \left[a\varrho_b – \frac{1}{2}(H + h + 2d)\varrho \right] g = 97\ \mathrm{MN}.$$



Obr. 2 Přehradní hráz ve dvou mezních případech

Diskuse

Zde řešená prakticky významná úloha je příkladem na situaci, kdy nelze použít běžnou formulaci Archimedova zákona. V prvním případě je přítlačná síla dána jednak tíhou vlastní betonové hráze, jednak tíhou vzduchu, který je nad ní (zde je to nezanedbatelná velikost 40 MN, která tvoří 27 % tíhy betonové hráze). Ve druhém případě tíhu hráze částečně zmenšuje hydrostatická vztlaková síla (nepočítaná ovšem podle Archimedova zákona), tíhová síla vzduchu se však naopak neuplatní – je kompenzovaná tlakem na spodní stěnu hráze). Žádoucí svislé upevnění hráze svislou silou je zde oproti prvnímu případu sníženo na pouhých 52 %.

Závěr

V práci je ukázáno, že i k tak dlouho známému zákonu, jakým je zákon Archimedův, je možné ještě něco dodat. Jde o to, aby jeho jednoduchá formulace nebyla při aplikacích zavádějící. Uvedené dva ilustrační příklady jsou velmi vhodné k zařazení k procvičení hydrostatického tlaku a Archimedova zákona ve středoškolské fyzice.

Literatura

[1] *Svoboda, E.* a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Praha: Prometheus, 2006.
[2] *Chytilová, M.*: Archimedův zákon. Knihovnička FO č. 19, Hradec Králové: MAFY, 1996.
[3] *Vybíral, B.*: Mechanika ideálních kapalin. Knihovnička FO č. 62, Hradec Králové: MAFY, 2003.

Myšlenkové odvozování veličinových rovnic

VOJTĚCH ŽÁK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

1 Úvod

Myšlenkovým odvozováním veličinových rovnic rozumíme v tomto článku hledání vztahů mezi fyzikálními veličinami na základě jednodušších úvah, které neprobíhají striktně deduktivně z obecných vztahů dané teorie, ale spíše se opírají o názor žáků a jejich předchozí zkušenosti. Jasnější vymezení bude zřejmé z uvedených pěti příkladů.

K napsání tohoto článku mě vedlo několik důvodů, které bych rád na tomto místě zmínil. Především bych se rád omluvil, že se zabývám tak