MATEMATIKA

Minkowského metoda měření délek, obsahů a povrchů geometrických útvarů

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU, Plzeň

Článek vychází u příležitosti autorova životního jubilea

Problém měření délek, obsahů a objemů geometrických útvarů historicky vznikl z praktických potřeb lidské populace, jejich měření bylo jednou z prvních matematických činností lidí. Pojmy délka úsečky, délka oblouku křivky, obsah rovinného obrazce a objem tělesa vznikly již ve starověké matematice (*Eudoxos, Eukleides, Archimedes*) a postupně byly precizovány. V 19. století k jejich precizaci značně přispěli zejména francouzský matematik *Camille Jordan* (1838–1922) a italský matematik *Giuseppe Peano* (1858–1932). Na konci 19. století a počátku 20. století pak především dva francouzští matematici *Émile Borel* (1871–1956) a *Henri Lebesgue* (1875–1941) měli zásadní zásluhu na vybudování exaktní *teorie míry geometrických útvarů* a jejím zobecnění v abstraktní *teorii míry množin* (nejen geometrických). Pro moderní matematiku ve 20. a 21. století je charakteristické, že se zabývá měřitelnými strukturami, v nichž je míra pojímána jako množinová funkce jistých vlastností, jež jsou zobecněním vlastností míry geometrických útvarů (množin bodů).

Míra geometrického útvaru je společný název pro délku útvaru na přímce či křivce, pro obsah útvaru v rovině či na ploše, pro objem útvaru v prostoru.

Obecně se pojem *míra útvaru* zavádí axiomaticky takto [1]:

Nechť je dán množinový systém $\mathcal{M}$ útvarů v takovém prostoru $\mathcal{P}$, ve kterém jsou definovány pojmy shodnost útvarů, vnitřní a hraniční bod útvaru. *Mírou útvarů* ze systému $\mathcal{M}$ nazýváme funkci m, která má tyto vlastnosti:

1. Každému útvaru $\mathsf{X} \in \mathcal{M}$ přiřazuje číslo $m(\mathsf{X}) \geq 0$.
2. Každým dvěma shodným útvarům X, Y ($\mathsf{X} \cong \mathsf{Y}$) přiřazuje totéž číslo $m(\mathsf{X}) = m(\mathsf{Y})$.
3. (*Aditivita míry m*) Každým dvěma útvarům X, Y, které nemají společný vnitřní bod, přiřazuje taková čísla $m(\mathsf{X})$, $m(\mathsf{Y})$, že
$$m(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) = m(\mathsf{X}) + m(\mathsf{Y}).$$
4. Alespoň jednomu útvaru $\mathsf{E} \in \mathcal{M}$ je přiřazeno číslo $m(\mathsf{E}) = 1$.

Konkrétní modely míry geometrických útvarů užívané ve školské geometrii byly vytvořeny již starořeckým matematikem *Archimedem ze Syrakus* a v moderním pojetí zejména francouzským matematikem *C. Jordanem* (v r. 1892). O této tzv. *Jordanově míře* a jejím užití v elementární geometrii a v matematické analýze pojednává podrobně řada našich knižních publikací (viz např. [2] a [3]). Omezené útvary, jimž přísluší nezáporná Jordanova míra, se nazývají *jordanovsky měřitelné*; rovinné útvary s kladnou mírou se nazývají ve školské geometrii *obrazce*, prostorové útvary s kladnou mírou jsou *tělesa*.

Další pro středoškolskou geometrii významnou alternativní metodou určování délek a obsahů geometrických útvarů je tzv. *Minkowského metoda*. Její základní idea má původ v pracích německých matematiků *Carla Wilhelma Borchardta* (1817–1880) a *Hermanna Minkowského* (1864–1909). Zásadní vliv na praktické uplatnění této metody ve výuce středoškolské geometrie měl pak francouzský matematik *Henri Lebesgue*, který ji zahrnul do svých přednášek o měření geometrických veličin pro studenty učitelství matematiky a do statí publikovaných v letech 1931–1935 ve švýcarském časopise „L'Enseignement mathématique“ („Vyučování matematice“). Později vyšly souborně v knižním vydání rusky a francouzsky [4]. U nás byla Minkowského metoda systematicky použita v závěrečných partiích středoškolské učebnice geometrie *Jana Vyšína a kol.* z r. 1954 [5]. Zpracování těchto partií bylo originální na základě využití matematického aparátu limit posloupností a velmi přesné, ale pro žáky značně náročné. Obecnější pohled na problematiku měření útvarů v geometrii (včetně Minkowského metody) obsahovala polská publikace pro učitele matematiky z r. 1961 [6]. O možnosti využití základní (přibližné) ideje Minkowského metody v geometrii na základní škole se zmiňovala metodická publikace našich autorů *Karla Hruši* a *Jana Vyšína* z r. 1964. Zajímavou stať o definici délky oblouku rovinné křivky v Minkowského pojetí obsahuje pátý svazek ruské Encyklopedie elementární matematiky z r. 1966 [7] v jedné z kapitol o měření geometrických útvarů v rovině a v prostoru. Pozoruhodné je, že v ruských středoškolských učebnicích geometrie (zejména pro třídy s rozšířenou výukou matematiky) od šedesátých let minulého století až do současnosti je zcela obvyklé užití Minkowského metody ve stereometrii s uplatněním pojmu limity funkce, viz např. učebnice [8] a [9].

Naše literatura postrádá obecný výklad Minkowského metody a jejího užití v elementární geometrii. Cílem předloženého článku je stručné vysvětlení matematických základů Minkowského metody a uvedení jednoduchých příkladů použitelných ve středoškolské geometrii, resp. v geometrických aplikacích matematické analýzy.

Idea Minkowského metody

Základní idea Minkowského metody definování a výpočtu délek křivek v rovině a obsahů ploch, speciálně povrchů těles v prostoru, je velmi jednoduchá a názorná. Vychází se z reálných (hmotných) modelů uvažovaných geometrických útvarů (křivek, ploch). Rovinná křivka se modeluje jako stopa (tvaru proužku) vytvořená hrotem tužky, pera či rýsovacích prostředků. Vydělením obsahu tohoto proužku jeho šířkou se dostane přibližně délka modelované křivky. Plocha v prostoru, speciálně hranice tělesa se modeluje tenkou vrstvou látky, např. alobalu. Vydělíme-li objem této vrstvy její tloušťkou, dostaneme přibližně obsah vymodelované plochy. Přesnost výpočtu v obou případech bude tím větší, čím je menší tloušťka modelu.

Matematické vyjádření Minkowského metody, definiční vzorce

K matematickému vyjádření Minkowského metody určení (definice a výpočtu) délky rovinné křivky a obsahu plochy v prostoru se zavádí pojem h-obalu rovinné křivky a h-obalu plochy v prostoru (pro $h > 0$):

Definice 1

h-obalem rovinné křivky k nazýváme množinu M_h všech bodů X roviny, z nichž pro každý existuje takový bod $Y \in \mathsf{k}$, že platí $|XY| \leq h$. Je tvořen všemi body kruhů se středy na dané rovinné křivce k a s poloměry rovnými danému číslu $h > 0$.

Poznámka. h-obal rovinné křivky k je uzávěr jejího h-okolí v rovině.

Definice 2

h-obalem plochy F v prostoru nazýváme množinu M_h všech bodů X prostoru, z nichž pro každý existuje takový bod $Y \in \mathsf{F}$, že platí $|XY| \leq h$. Je tvořen všemi body koulí se středy na dané ploše F a s poloměry rovnými danému číslu $h > 0$.

Poznámka. h-obal plochy F v prostoru je uzávěr jejího h-okolí v prostoru.

Užitím těchto pojmů se definuje délka oblouku rovinné křivky k a obsah plochy F v prostoru podle Minkowského takto:

Definice 3

Délkou d oblouku rovinné křivky k podle Minkowského nazýváme konečnou limitu podílu obsahu (dvojrozměrné Jordanovy míry) S_h jejího h-obalu a čísla $2h$ pro $h \to 0+$, pokud tato limita existuje a je kladná:

$$d = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h}{2h}. \tag{1}$$

Speciálně *délkou uzavřené rovinné křivky* k neboli *obvodem o rovinného obrazce* O, jehož je křivka k hranicí, podle Minkowského nazýváme za obdobných předpokladů limitu:

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h}{2h}. \tag{1a}$$

Označíme-li S_h^+ obsah vnější části h-obalu křivky k a S_h^- obsah vnitřní části h-obalu křivky k, pak za obdobných předpokladů platí:

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h^+}{h}, \tag{1b}$$

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h^-}{h}. \tag{1c}$$

Definice 4

Obsahem S plochy F v prostoru podle Minkowského nazýváme konečnou limitu podílu objemu (trojrozměrné Jordanovy míry) V_h jejího h-obalu a čísla $2h$ pro $h \to 0+$, pokud tato limita existuje a je kladná:

$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V_h}{2h}. \tag{2}$$

Speciálně pro uzavřenou plochu F, která je hranicí tělesa T, představuje S *povrch tělesa*. Označíme-li V_h^+ objem vnější části h-obalu plochy F a V_h^- objem vnitřní části jejího h-obalu, pak za obdobných předpokladů platí:

$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V_h^+}{h}, \tag{2a}$$

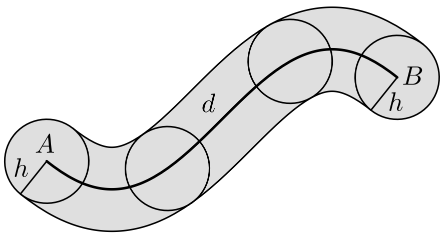
$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V_h^-}{h}. \tag{2b}$$

Definice 3 a 4 jsou teoreticky použitelné vždy za uvedených předpokladů. Jejich praktické použití k výpočtu délek oblouků rovinných křivek a obsahů ploch v prostoru je ovšem omezené jen na případy, kdy dovedeme vypočítat příslušné obsahy, resp. objemy jejich h-obalů.

Příklady užití Minkowského metody v elementární geometrii

a) Výpočet délky rovinné křivky

Délku d oblouku AB rovinné křivky k podle Minkowwského můžeme vypočítat užitím vzorce (1), jestliže dovedeme určit obsah S_h h-obalu oblouku AB (obr. 1). Jako nejjednodušší uvedeme nejprve ilustrativní příklad délky d úsečky AB.



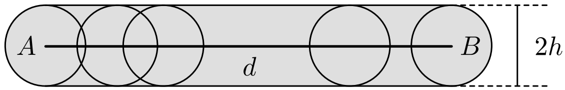
Obr. 1

Příklad 1

Prověřte, že Minkowského metodou dostáváme jako délku d libovolné úsečky AB její standardní délku $|AB|$.

Řešení: h-obal úsečky AB (obr. 2) má obsah $S_h = |AB| \cdot 2h + \pi h^2$ (kde $|AB|$ je délka úsečky jako vzdálenost bodů A, B), a tedy podle vzorce (1) pro její délku d podle Minkowského platí:

$$d = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h}{2h} = \lim_{h \to 0+} \left(|AB| + \frac{\pi}{2} h \right) = |AB|.$$

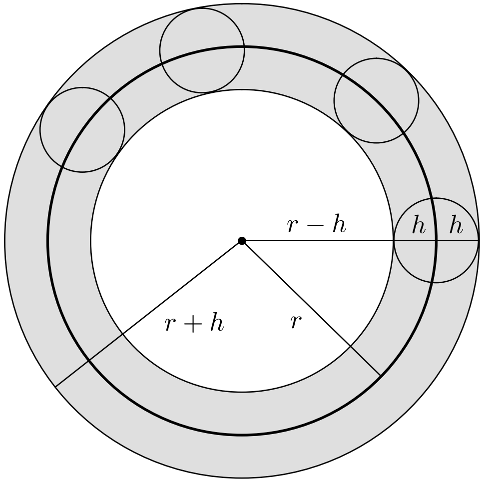


Obr. 2

Prakticky významné příklady užití Minkowského metody představují odvození vzorců pro délku kružnice (obvod kruhu) a délku kruhového oblouku.

Příklad 2

Odvoďte užitím Minkowského metody vzorec pro délku kružnice k (obvod kruhu) o poloměru r.



Obr. 3

Řešení: Označme $S(r)$ obsah kruhu o poloměru r, tj. $S(r) = \pi r^2$. Na obr. 3 je h-okolí kružnice k mezikruží o obsahu

$$S_h = S(r+h) - S(r-h) = 4\pi r h,$$

takže podle vzorce (1a) má kružnice délku

$$o = \lim_{h\to 0+} \frac{S(r+h) - S(r-h)}{2h} = 2\pi r.$$

Poznámka. Odvodili jsme takto, že obvod o kruhu o proměnném poloměru r je tzv. *symetrickou derivací* jeho obsahu $S(r) = \pi r^2$, $o(r) = S'_s(r)$. Užitím vzorců (1b), (1c) obdobně dostáváme:

$$o = \lim_{h\to 0+} \frac{S(r+h) - S(r)}{h} = 2\pi r, \quad o = \lim_{h\to 0+} \frac{S(r) - S(r-h)}{h} = 2\pi r.$$

Prvním z těchto vztahů je obvod o kruhu pro proměnný poloměr r vyjádřen jako *derivace zprava* jeho obsahu $S(r) = \pi r^2$ a druhým je vyjádřen jako jeho *derivace zleva.* Protože platí $S'_+(r) = S'_-(r) = 2\pi r$, plyne odtud, že symetrická derivace funkce $S(r) = \pi r^2$ je rovna její derivaci: $S'_s(r) = S'(r) = 2\pi r$. Zároveň zdůrazněme, že všechny tyto vztahy nejsou žádnou invariantní vlastností uvažovaného obrazce (kruhu) a jeho hranice (kružnice), neboť platí pouze, když za funkční proměnnou zvolíme poloměr r (nikoliv např. průměr d).

Příklad 3

Odvoďte užitím Minkowského metody vzorec pro délku oblouku kružnice o poloměru r příslušného k jejímu středovému úhlu ASB o velikosti x v obloukové míře.

Řešení: Příslušná kruhová výseč má obsah

$$S_v(r) = \pi r^2 \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 x,$$

takže h-obal uvažovaného oblouku kružnice má obsah

$$S_h = \frac{1}{2}\big[(r+h)^2 - (r-h)^2\big]x + \pi h^2 = 2rxh + \pi h^2.$$

Ze vzorce (1) pak pro délku tohoto oblouku podle Minkowského dostáváme:

$$d = \lim_{h\to 0+} \frac{S_h}{2h} = \lim_{h\to 0+} \big(rx + \frac{\pi}{2}h\big) = rx.$$

Příklad 4

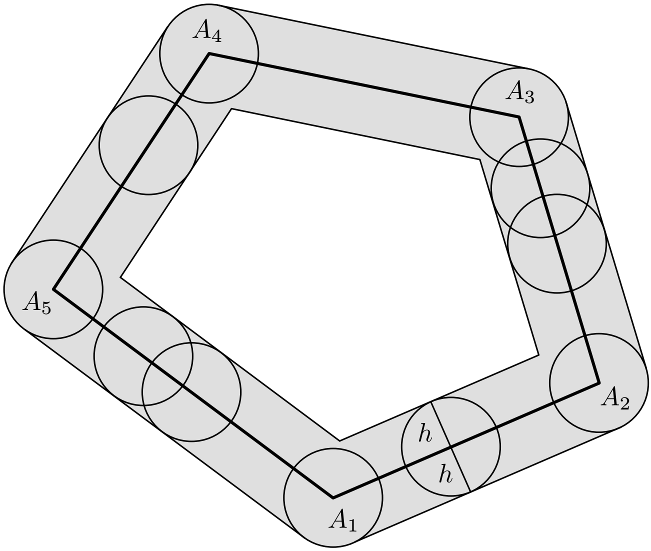
Odvoďte Minkowského metodou vzorec pro obvod konvexního mnohoúhelníku.

Řešení: Uvažujme libovolný konvexní n-úhelník $A_1A_2\dots A_n$ se stranami délek $a_1, a_2, \dots, a_n$. Sestrojíme rovinné h-okolí jeho hranice (obr. 4 pro konvexní pětiúhelník), jehož vnější část má obsah

$$S_h^+ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)h + \pi h^2.$$

Ze vzorce (1b) pak pro jeho obvod o plyne:

$$o = \lim_{h\to 0+} \frac{S_h^+}{h} = \lim_{h\to 0+} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \pi h) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$



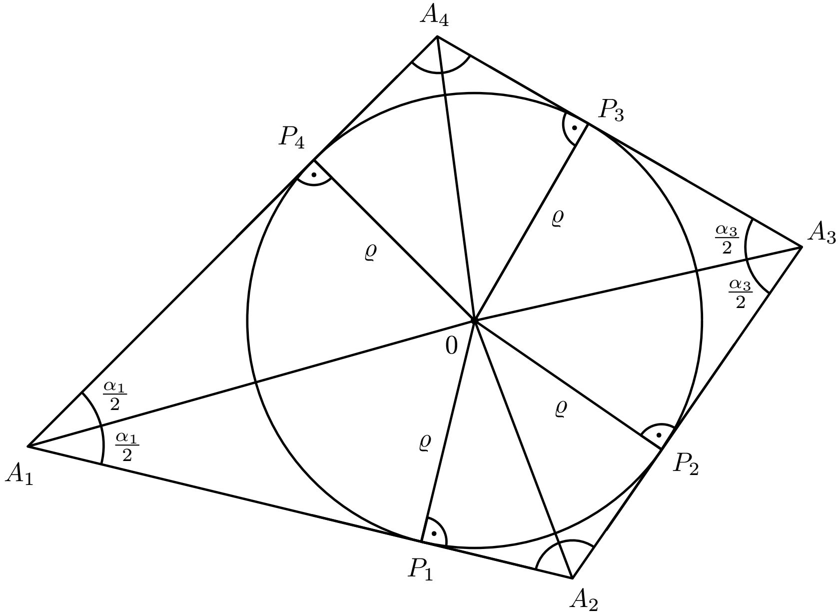
Obr. 4

Poznámka. Lze dokázat (viz [7]), že pro všechny jednoduché oblouky křivek schopné rektifikace, tj. mající konečnou délku definovanou jako limita posloupnosti vepsaných lomených čar, je tato délka rovna jeho délce podle Minkowského definice.

Příklad 5

Odvoďte, jaký platí speciálně vztah mezi obsahem S a obvodem o konvexního mnohoúhelníku, jemuž lze vepsat kružnici k (tzv. *tečnového mnohoúhelníku*).

Řešení: Označme O střed kružnice k vepsané tečnovému n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$, ϱ její poloměr a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dotykové body kružnice k se stranami tohoto n-úhelníku o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (obr. 5 pro $n = 4$). Dále označme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jeho vnitřní úhly při vrcholech $A_1, A_2, \ldots, A_n$.



Obr. 5

Z rozkladu trojúhelníků $A_1A_2O, \ldots, A_nA_1O$ na pravoúhlé trojúhelníky A_1P_1O a A_2P_1O, …, A_nP_nO a A_1P_nO plyne (obr. 5), že

$$a_1 = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} + \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2}$$

čili

$$a_1 = c_1\varrho, \quad \text{kde } c_1 = \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2},$$

…,

$$a_n = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_n}{2} + \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}$$

čili

$$a_n = c_n\varrho, \quad \text{kde } c_n = \operatorname{cotg} \frac{\alpha_n}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}.$$

Označíme-li

$$c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 2\left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} + \ldots + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_n}{2}\right),$$

dostáváme, že pro obvod a obsah tečnového n-úhelníku platí

$$o = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = c\varrho, \quad S = \frac{1}{2}a_1\varrho + \frac{1}{2}a_2\varrho + \ldots + \frac{1}{2}a_n\varrho = \frac{1}{2}c\varrho^2.$$

Pro funkce $o(\varrho) = c\varrho$ a $S(\varrho) = \frac{1}{2}c\varrho^2$ plyne jako triviální důsledek, že $S'(\varrho) = o(\varrho)$, tj. pro tečnový mnohoúhelník o poloměru vepsané kružnice ϱ platí, že derivace jeho obsahu S podle ϱ je rovna jeho obvodu o.

Poznámka. Speciálně odvozené vztahy $o = c\varrho$ a $S = \frac{1}{2}c\varrho^2$ platí pro libovolný trojúhelník, kde $c = 2\big(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\big)$ a pro každý pravidelný mnohoúhelník (kde např. pro rovnostranný trojúhelník je $c = 6\sqrt{3}$, pro čtverec $c = 8$, atd.).

b) Výpočet obsahu plochy v prostoru, speciálně povrchu tělesa

Obsah S plochy F v prostoru podle Minkowského můžeme vypočítat pomocí vzorce (2), jestliže dovedeme určit objem jejího h-obalu.

Příklad 6

Ověřte, že pro libovolný konvexní mnohoúhelník v prostoru obsah S určený podle Minkowského metody je týž jako jeho rovinný obsah S_p.

Řešení: h-obal uvažovaného n-úhelníku v prostoru má objem, který opět snadno vypočteme:

$$V_h = S_p \cdot 2h + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\pi h^2 + \frac{4}{3}\pi h^3,$$

kde S_p je jeho rovinný obsah, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou délky jeho stran. Jeho obsah S podle Minkowského určíme užitím vzorce (2):

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0+} \left[S_p + \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\pi h + \frac{2}{3}\pi h^2\right] = S_p.$$

Zvláště významná a prakticky užívaná je Minkowského metoda při definování a výpočtu povrchu těles. Pokud se hranice těles skládá z jednoduchých rovinných obrazců jako u mnohostěnů či ji lze „rozvinout“ do roviny jako u rotačního válce nebo rotačního kužele, výpočet povrchu tělesa je velmi jednoduchý. Povrch tělesa v takovém případě je rovný součtu obsahů rovinných obrazců, z nichž se skládá hranice tělesa. U těles, jejichž hranici nelze „rozvinout“ do roviny, jako jsou např. koule a její části, je nutné definovat, co se obecně rozumí *povrchem tělesa*. Nabízí se postupovat při této definici obdobně jako při definování délky oblouku křivky jako limity posloupnosti vepsaných lomených čar složených z n úseček pro $n \to \infty$. Avšak již v r. 1890 zveřejnil německý matematik *H. A. Schwarz* (1843–1921) článek, ve kterém ukázal, že povrchy oblých těles nelze bez doplňujících podmínek definovat jako limity posloupností povrchů vepsaných n-stěnů pro $n \to \infty$.

Poznámka. Označíme-li δ_n maximální rozměr stěn vepsaného n-stěnu (tj. největší vzdálenost mezi dvěma body na jeho stěnách), pak jako doplňkovou podmínku pro zvolenou posloupnost povrchů vepsaných n-stěnů a $n \to \infty$ je nutné klást $\delta_n \to 0$.

Praktické užití Minkowského metody je možné jen tehdy, když dovedeme vypočítat (elementárně či užitím integrálního počtu) objem h-obalu hranice tělesa. Z didaktického hlediska ovšem výhodu Minkowského metody určování (definice a výpočtu) povrchu těles představuje skutečnost, že je univerzální pro všechna tělesa (mnohostěny a rotační tělesa) ve středoškolské geometrii.

Příklad 7

Odvoďte užitím Minkowského metody vzorec pro povrch koule K o poloměru r.

Řešení: Označme $V(r)$ objem koule o poloměru r, tj. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Z prostorové analogie obr. 3 je zřejmé, že h-okolí koule K má objem

$$V_h = V(r+h) - V(r-h) = \frac{8}{3}\pi h(3r^2 + h^2)$$

a podle vzorce (2) má proto koule povrch

$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V(r+h) - V(r-h)}{2h} = 4\pi r^2.$$

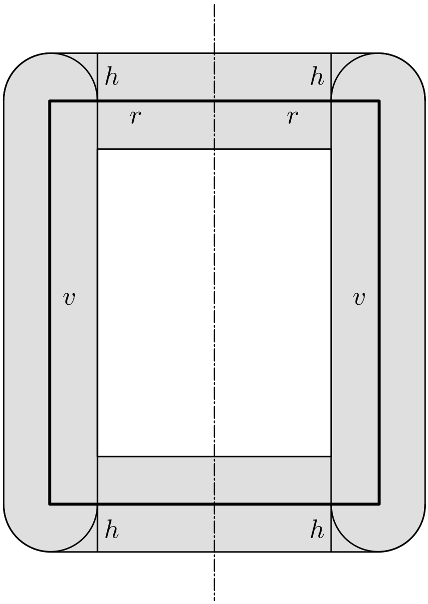
Poznámka. Odvodili jsme takto užitím vzorce (2), že povrch S koule o poloměru r je *symetrickou derivací* jejího objemu $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$: $S(r) = V'_s(r)$. Užitím vzorců (2a), (2b) obdobně dostáváme:

$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V(r+h) - V(r)}{h} = 4\pi r^2, \quad S = \lim_{h \to 0+} \frac{V(r) - V(r-h)}{h} = 4\pi r^2.$$

Prvním z těchto vztahů je povrch S koule o proměnném poloměru r vyjádřen jako *derivace zprava* jejího objemu $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ a druhým je vyjádřen jako jeho *derivace zleva*. Protože podle těchto vztahů pro ně platí $V'_+(r) = V'_-(r) = 4\pi r^2$, plyne odtud, že symetrická derivace funkce $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ je rovna její derivaci, tj. $V'_s(r) = V'(r) = 4\pi r^2$. Zároveň opět zdůrazněme, že tyto vztahy nejsou invariantní vlastností uvažovaného tělesa (koule) a jeho hranice (koulové plochy), neboť platí pouze, když za funkční proměnnou se zvolí jejich poloměr r (nikoliv např. průměr d).

Příklad 8

Užitím Minkowského metody odvoďte vzorec pro povrch rotačního válce o poloměru podstavy r a výšce v.



Obr. 6

Řešení: h-okolí hranice válce je znázorněno na obr. 6. Výpočet jeho objemu V_h a objemu jeho vnější části V_h^+ je obtížnější, objem jeho vnitřní části V_h^- však vypočteme jednoduše jako rozdíl objemů dvou rotačních válců:

$$V_h^- = \pi r^2 v - \pi (r-h)^2 (v - 2h) = \pi h(2rv + 2r^2 - vh - 4rh + 2h^2).$$

Podle vzorce (2b) pro povrch daného rotačního válce platí:

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h^-}{h} = \lim_{h\to 0+} \pi(2rv + 2r^2 - vh - 4rh + 2h^2) = 2\pi rv + 2\pi r^2.$$

Příklad 9

Odvoďte Minkowského metodou vzorec pro povrch S konvexního mnohostěnu.

Řešení: Uvažujme libovolný konvexní s-stěn se stěnami o obsazích S_1, $S_2, \dots, S_s$. Pro vnější část objemu h-obalu jeho hranice lze odvodit vztah

$$V_h^+ = (S_1 + S_2 + \ldots + S_s)h + \frac{1}{2}Ch^2 + \frac{4}{3}\pi h^3,$$

kde C je konstanta rovná součtu součinů délek hran mnohostěnu a velikostí příslušných vnějších úhlů. (Přitom vnějším úhlem příslušným k hraně se rozumí úhel sevřený vnějšími normálami ke stěnám, jež mají společnou tuto hranu.) Povrch S mnohostěnu vypočteme užitím vzorce (2a):

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h^+}{h} = \lim_{h\to 0+} \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_s + \frac{1}{2}Ch + \frac{4}{3}\pi h^2\right) = \\ = S_1 + S_2 + \ldots + S_s.$$

Příklad 10

Odvoďte, jaký platí vztah speciálně mezi objemem V a povrchem S konvexního mnohostěnu, jemuž lze vepsat kouli K (tzv. *tečného mnohostěnu*).

Řešení: Označme O střed vepsané koule K a ϱ její poloměr. Pomocí stejnolehlosti se středem O a koeficientem stejnolehlosti ϱ dostáváme, že pro obsahy všech stěn tečnového mnohostěnu platí $S_i = c_i\varrho^2$ $(i = 1, 2, \dots, s)$. Odtud plyne pro jeho povrch vztah

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_s = (c_1 + c_2 + \ldots + c_s)\varrho^2,$$

čili

$$S = c\varrho^2 \quad (\text{kde } c = c_1 + c_2 + \ldots + c_s).$$

Jeho objem vypočteme jako součet objemů s jehlanů o obsazích podstav S_i a výšce ϱ (s hlavním vrcholem O):

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_s = \\ = \frac{1}{3}S_1\varrho + \frac{1}{3}S_2\varrho + \ldots + \frac{1}{3}S_s\varrho = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_s)\varrho = \frac{1}{3}S\varrho$$

čili

$$V = \frac{1}{3}c\varrho^3.$$

Pro funkce $S(\varrho) = c\varrho^2$ a $V(\varrho) = \frac{1}{3}c\varrho^3$ plyne jako triviální důsledek, že $V'(\varrho) = S(\varrho)$, tj. pro tečný mnohostěn o poloměru vepsané koule ϱ je derivace jeho objemu podle ϱ rovna jeho povrchu S.

Poznámka. Speciálně vztahy odvozené v příkladu 10 platí pro všechny pravidelné mnohostěny.

Příklad 11

Anuloid vzniklý rotací kruhu o poloměru r kolem osy o ve vzdálenosti R od středu kruhu má objem $V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$. Určete užitím Minkowského metody vzorec pro povrch S anuloidu.

Řešení: Uvažujeme objem h-obalu anuloidu jako funkci proměnné r:

$$V_h = V(r+h) - V(r-h) = 2\pi r \cdot 2\pi R \cdot 2h$$

a ze vzorce (2) pak pro povrch anuloidu dostáváme:

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{V(r+h) - V(r-h)}{2h} = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R r.$$

Poznámka. Odvození vzorce pro povrch anuloidu lze provést též užitím vzorců (2a), (2b) a vyslovit obdobné závěry jako v poznámce k příkladu 7.

Literatura

[1] *Sedláček, J. a kol.*: Slovník školské matematiky. SPN, Praha 1981.

[2] *Vyšín, J. a kol.*: Geometrie pro pedagogické fakulty. I. díl. SPN, Praha 1965. Geometria pre pedagogické fakulty. II. diel. SPN, Bratislava 1970.

[3] *Schwabik, Š. – Šarmanová, P.*: Malý průvodce historií integrálu. (Dějiny matematiky, sv. 6.) Prometheus, Praha 1996.

[4] *Lebesgue, H.*: La mesure des grandeurs. Institut de Mathématiques Université, Genéve 1956. (Ruský překlad: Ob izmerenii veličin. – 2. vyd. GUPI, Moskva 1960.)

[5] *Vyšín, J. a kol.*: Geometrie pro jedenáctý postupný ročník. SPN, Praha 1954.

[6] *Moszner, Z.*: O mierzeniu w matematyce. PZWS, Warszawa 1961.

[7] *Boltjanskij, V. G. – Jaglom, I. M. (red.)*: Enciklopedija elementarnoj matěmatiki. Kniga 5 – Geometrija. Nauka, Moskva 1966.

[8] *Pogorelov, A. V.*: Geometrija dlja 6–10 klassov sredněj školy. Prosveščenije, Moskva 1986. (5. vydání.)

[9] *Kalinin, A. J. – Těrešin, D. A.*: Stereometrija dlja 11 klassa. Eksperimentalnyj učebnik dlja škol s uglublennym izučenijem matěmatiki. Izdatělstvo MFTI, Moskva 2001.