Odhady a odhadování v matematice

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Tenkrát na „základce“

Jeden z autorů článku učil před lety externě v 5. ročníku[1] základní školy, kde v tématu desetinná čísla zadal následující úlohu, kterou objevil v jedné české sbírce z matematiky:

Piskor etruský patří mezi nejmenší savce. Má hmotnost 2,5 g a jeho srdce 0,045 g. Vyjádřete hmotnost piskora a jeho srdce v kilogramech.

Obr. 1

Vyučujícímu bylo jasné, že úloha je vytvořená uměle, a tím spíše byl zvědav na reakce žáků. Úlohu zadal k samostatné práci. Žáci bez rozpaků převáděli gramy na kilogramy, někteří správně, jiní špatně. Při kontrole výsledků se učitel zeptal, zda vědí, jak vypadá zvíře – piskor etruský (obr. 1, [5]). Žáci nevěděli.[2] Podstatné ale bylo, že byli překvapení a divili se, proč se na to učitel ptá. Jejich úkolem bylo přece převádět gramy na kilogramy.

[1] Tehdy se jednalo o první ročník druhého stupně osmileté základní školy.

[2] Ani to vědět nemohli. Autoři sbírky převzali úlohu zřejmě ze slovenského zdroje. Po poradě s odborníky se zjistilo, že v českém názvosloví jde o bělozubku nejmenší (latinsky Suncus etruscus).

Učitele zajímalo, jaký mají žáci odhad velikosti piskora etruského. Rozpětím rukou postupně ukazoval různé zmenšující se velikosti a ptal se, zda to již odpovídá piskorovi. Žáci se sborově shodli na velikosti menšího králíka.

Učitel měl dále připravenu sadu kuchyňských závaží v rozmezí 1 gram až 500 gramů. Závaží postupně kolovala mezi žáky a ti měli rozhodnout, které z nich má přibližně stejnou hmotnost jako piskor (závaží byla z období Rakouska-Uherska a jednotky na nich byly značeny jinak, než je tomu v současné době). Tady se žáci neshodli – přibližně polovina z nich zvolila závaží o hmotnosti 100 gramů, druhá polovina 200 gramů.

Formálnost zadání dané úlohy vedla k tomu, že žáci problém nechápali jako reálnou situaci. Žáci sice věděli, že $1\ \text{g} = 0{,}001\ \text{kg}$, ale neměli představu o tom, čemu v realitě hmotnost jednoho gramu odpovídá. Jejich odhady byly proto nesprávné. Bohužel se i dnes ve školské matematice setkáváme s tím, že žáci dělají hrubé chyby v odhadech, vyhýbají se jim a podceňují je. Je ale chyba jen na straně žáků?

Co je vlastně odhad?

Zamysleme se nad tím, co se ve školské matematice rozumí slovem *odhad*. Encyklopedie Wikipedia v české verzi uvádí následující neurčité objasnění: *Odhad je vypočítané nebo jen ze zkušenosti předpovězené více či méně přibližné určení výsledku nebo informace, která je využitelná, i když jsou vstupní data nekompletní, nejistá, nebo zašumělá.* [6]

Slovenská verze téže encyklopedie uvádí podle našeho názoru výstižnější vysvětlení: *Odhad je posúdenie, ocenenie (obyčajne približné) hodnoty, schopnosti, množstva, veľkosti a pod. niečeho.* [7]

Bez znalosti dalšího kontextu lze jen obtížně zformulovat výstižnou charakteristiku pojmu odhad. V následujícím textu budeme používat slova *odhad* či *odhadni* ve výuce matematiky k označení úkolů, ve kterých nejde o přesný výsledek, ale o vytvoření správné představy o možném výsledku daného úkolu. Odhadování ve výuce školské matematiky považujeme za základní součást adekvátního pohledu na matematický problém. V některých případech je odhad finálním výsledkem řešení problému. Častěji však bývá součástí úvodních úvah vedoucích k vyřešení úkolu či prostředkem kontroly správnosti získaného výsledku.

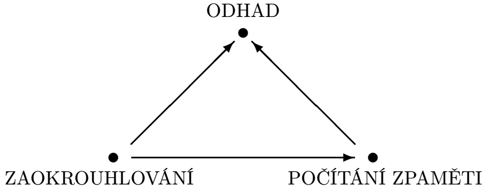
Naskýtá se otázka, zda výuka ve škole systematicky a cíleně vede žáky k odhadování různých veličin. Přitom Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [4] v charakteristice vzdělávací oblasti *Matematika a její* *aplikace* na odhady pamatuje: „Učí se [žáci] získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním.“, „...učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem).“ V cílovém zaměření i v očekávaných výstupech jsou tyto požadavky pro první i druhý stupeň dále rozvedeny a konkretizovány. V rámcových vzdělávacích programech pro jednotlivé typy středních škol je odhadování zmíněno obvykle jen v očekávaných výstupech konkrétního tematického celku.

Na prvním stupni základní školy by odhady měly být běžnou součástí výuky. Žáci mohou například odhadovat hmotnost učebnice, školní tašky, lahve s pitím ke svačině či hmotnost jedné křídy. Stejně tak mohou cvičit odhady délky lavice, učebny, délku svého kroku či odhad vzdálenosti mezi školou a náměstím a odhad času potřebného k ujití této vzdálenosti. Takovýchto situací k odhadování je nepřeberné množství. Charakteristickým rysem při jejich řešení je pozorování, porovnávání, odhadování (nikoliv výpočet) a následná kontrola pomocí měřicího přístroje (metru, váhy, stopek apod.). Tyto úlohy by neměly být jen doménou matematiky, ale měly by prostupovat dalšími předměty s přírodovědným zaměřením.

Zaokrouhlování, počítání zpaměti a odhadování

Podívejme se na další situaci, se kterou se setkal druhý z autorů článku při nákupu hifi systému za cenu 4 590 Kč a blu-ray přehrávače za 2 799 Kč. Prodavač zadal kupované zboží do počítačového systému a vystavil pro pokladnu účet na 10 188 Kč. Po delším dohadování o výši celkové ceny se ukázalo, že prodavač omylem vložil přehrávač do počítače dvakrát. Prodavač více věřil technice–počítači než vlastnímu úsudku. Mělo mu být jasné, že i hrubý odhad „5 000 Kč + 3 000 Kč“ dává výsledek, který je podstatně nižší.

Základem pro správné odhadování je jednak *dovednost zaokrouhlovat* čísla, jednak *dovednost počítat zpaměti*, jak ukazuje schéma na obrázku 2.



Obr. 2

Ve školské matematice je věnována poměrně značná pozornost zaokrouhlování výsledků podle matematických pravidel na daný řád. Na základě našich zkušeností z praxe na základních a středních školách se zdá, že v případě počítání zpaměti tomu tak již není; někdy se dokonce hovoří o tom, že početní dril do současné školy vůbec nepatří. Uvedené tvrzení zřejmě vychází z rozsáhlého využívání výpočetních prostředků v běžné praxi. Pak se ovšem nemůžeme divit, že žák například součin $5 \cdot 8$ počítá na kalkulačce. Domníváme se, že matematické rozcvičky, při kterých se trénuje malá i velká násobilka, pamětní sčítání, odčítání, násobení a dělení do výuky školské matematiky rozhodně patří. Uvádíme několik příkladů, ve kterých se při odhadech ukazuje význam počítání zpaměti.

Příklad 1

Rozměry kvádru jsou 4,1 m, 2,8 m a 3,9 m. Odhadněte, který z následujících údajů je nejblíže objemu kvádru zaokrouhlenému na celé krychlové metry:

85 m^3, 65 m^3, 45 m^3, 25 m^3.

Řešení. Objem kvádru V odhadneme tak, že zaokrouhlíme jeho rozměry na celé metry:

$$V \doteq 4\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{m} = (3 \cdot 16)\,\mathrm{m}^3 = 48\,\mathrm{m}^3.$$

Objem kvádru je nejblíže 45 m^3. Budeme-li počítat s danými rozměry kvádru, dospějeme k výsledku $V = 44{,}772\,\mathrm{m}^3$.

Příklad 2

Poloměr r podstavy rotačního kužele je 4,2 cm, jeho výška v je 6,1 cm. Odhadněte, který z následujících objemů nejlépe odpovídá objemu kužele zaokrouhlenému na celé krychlové centimetry:

130 cm^3, 100 cm^3, 70 cm^3, 40 cm^3.

Řešení. Objem kužele V určíme pomocí vztahu $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$. Při určení objemu kužele využijeme zaokrouhlení jeho rozměrů na celé centimetry, číslo π zaokrouhlíme na celé číslo 3:

$$V \doteq \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 6\right)\mathrm{cm}^3 = 96\,\mathrm{cm}^3.$$

Objem kužele je nejblíže 100 cm^3. Pokud bychom počítali s danými rozměry kužele a číslem π zaokrouhleným na 3,14, pak po zaokrouhlení na dvě desetinná místa dostaneme $V \doteq 112{,}63$ cm^3.

Hrubé odhady nám v některých situacích samozřejmě nestačí, neboť účelnost hrubého odhadu souvisí s konkrétními údaji v úloze. Pokud bychom např. v předchozí úloze zvětšili výšku kužele o 0,2 cm na $v = 6{,}3$ cm, odhad objemu se nezmění. Dospěli bychom ke stejnému závěru, že objem kužele je nejblíže 100 cm^3. Při výpočtu s nezaokrouhlenými rozměry bychom však získali objem 116,32 cm^3, čemuž z nabídky lépe odpovídá údaj 130 cm^3.

Příklad 3

Odhadni, které z čísel 2 500, 3 000, 3 500 je nejblíže součtu čísel $756 + 1\,748 + 254$.

Řešení. Jednotlivé sčítance zaokrouhlíme na celá sta a určíme jejich součet:

$$800 + 1\,700 + 300 = 2\,800.$$

Nejblíže danému součtu je číslo 3 000. Přesný součet je 2 758.

Dolní a horní odhady

V reálné praxi je potřeba umět zaokrouhlovat také *nahoru* i *dolů* na požadovaný řád čísla. Například při vyplňování daně z příjmu se základ daně počítá se zaokrouhlením na celá sta korun dolů, vypočítaná daň se zaokrouhluje na celé koruny nahoru, záloha na daň se zaokrouhluje na celé stokoruny nahoru. Těmto problémům jsme se věnovali v článku [3]. Užití dolních a horních odhadů ukážeme opět na příkladech.

Příklad 4

Prodejce nabízí nový typ televizoru buď za 19 900 Kč, nebo na splátky. V případě, že se zákazník rozhodne využít prodeje na splátky, zaplatí v prodejně akontaci 20 % z ceny televizoru a dále postupně uhradí 20 měsíčních splátek, každou ve výši 4,86 % z prodejní ceny. Máme odhadnout, kolik nejvýše stojí televizor při prodeji na splátky.

Řešení. Odhadneme, kolik korun *nejvýše* za televizor zaplatíme. K tomu využijeme *horní odhad* celkové ceny při prodeji na splátky. Zaokrouhlíme cenu televizoru na celé tisíce nahoru, tj. na 20 000 Kč; akontace 20 % ze zaokrouhlené ceny pak činí 4 000 Kč. Výši splátky v procentech také zaokrouhlíme opět nahoru, a to na 5 %; v tom případě je jedna splátka 1 000 Kč. Celková cena při prodeji na splátky je pak dána součtem akontace a dvaceti měsíčních splátek:

$$4\,000 \text{ Kč} + 20 \cdot 1000 \text{ Kč} = 24\,000 \text{ Kč}.$$

Horní odhad ceny za daných podmínek je 24 000 Kč. Pokud bychom nezaokrouhlili vstupní údaje, byla by akontace 3 980 Kč, splátka 967,14 Kč a celková cena

$$3\,980\,\mathrm{Kč} + 20 \cdot 967{,}14\,\mathrm{Kč} = 23\,322{,}80\,\mathrm{Kč}.$$

Příklad 5

Pavel zvažuje uložit 32 000 Kč na termínovaný vklad na 3 roky. Roční úroková sazba termínovaného vkladu je 0,74 %, banka používá složené úročení, úroky připisuje na konci každého roku. Pavel chce odhadnout, kolik korun *nejméně* získá na úrocích po zdanění celkem.

Řešení. Využijeme *dolní odhad.* Nejdříve zaokrouhlíme dolů úrokovou sazbu na 0,7 % a vklad na 30 000 Kč. Daň z úroků činí 15 %, tj. zdaňovací koeficient je 0,85, po zaokrouhlení dolů je 0,8. Dolní odhad ročního úroku po zdanění je potom

$$0{,}8 \cdot 0{,}007 \cdot 30\,000\,\mathrm{Kč} = 0{,}005\,6 \cdot 30\,000\,\mathrm{Kč}.$$

Výsledek výpočtu odhadneme zdola pomocí součinu $0{,}005 \cdot 30\,000$ Kč. Jde tedy o půl procenta z 30 000 Kč, tj. $0{,}5 \cdot 300$ Kč $=$ 150 Kč. Vzhledem k tomu, že úroková sazba i vklad jsou nízké, můžeme při odhadu využít jednoduché úročení namísto složeného. Celkový úrok po zdanění za 3 roky činí $3 \cdot 150\,\mathrm{Kč} = 450\,\mathrm{Kč}$. Odhadem Pavel získá na úrocích po zdanění *aspoň* 450 Kč.

V případě, že bychom nezaokrouhlili vstupní údaje, použili složené úročení a výsledek zaokrouhlili na celé koruny, činil by celkový zdaněný úrok za 3 roky 608 Kč, neboť

$$32\,000\,\mathrm{Kč} \cdot [(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}007\,4)^3 - 1] \doteq 607{,}65\,\mathrm{Kč}.$$

Příklad 6

Banka nabízí spotřebitelské úvěry do 100 000 Kč s roční procentní sazbou nákladů[3] (RPSN) ve výši 14 %, úročí na konci každého měsíce. Zajímá nás, zda při úvěru 45 000 Kč nám banka umožní splácet měsíčně *jen* 400 Kč.

[3]Roční procentní sazba nákladů (RPSN) je číslo vyjadřující procentuální podíl z dlužné částky, který musí spotřebitel zaplatit za období jednoho roku v souvislosti se splátkami, správou a dalšími výdaji spojenými s čerpáním úvěru (zdroj Wikipedia).

Řešení. Měsíční splátka nesmí být samozřejmě nižší než je úrok z úvěru za první měsíc. K řešení můžeme využít *dolní odhad* měsíční splátky.[4] Roční úroková sazba úvěru činí 14 %, proto úroková sazba vztažená k jednomu měsíci je 1/12 ze 14 %. Zaokrouhlíme tedy 14 % dolů na 12 %, úroková sazba vztažená k jednomu měsíci je potom 1/12 z 12 %, tj. 1 %. Dolní odhad měsíčního úroku z částky 45 000 Kč je

$$0{,}01 \cdot 45\,000\,\text{Kč} = 450\,\text{Kč}.$$

Banka nám tedy úvěr neposkytne, neboť bychom splátkou 400 Kč neuhradili ani úrok za první měsíc úvěru; výše dluhu by tak stále narůstala.

Příklad 7 Máme rozhodnout, která z následujících možností platí: Součin čísel 532 a 27 je

a) menší než 1 000, b) menší než 10 000,
c) větší než 10 000, d) větší než 20 000.

Řešení. Pomocí *dolního odhadu* zjistíme, že součin $532 \cdot 27$ nemůže být menší než $500 \cdot 20 = 10\,000$. Tím vyloučíme možnosti a), b). S využitím *horního odhadu* $600 \cdot 30 = 18\,000$ vyloučíme možnost d). Tak dospějeme k závěru, že součin daných čísel je větší než 10 000.

Příklad 8

Chceme rozhodnout, zda podíl 724 : 1 590 je menší či větší než 0,5.

Řešení. Tento příklad je obtížnější než předchozí. Můžeme postupovat takto:

Číslo 724 je menší než 750, tedy 724 : 1 590 je menší než 750 : 1 590. Číslo 1 590 je větší než 1 500, proto 700 : 1 590 je menší než 750 : 1 500. Víme, že 750 : 1 500 = 0,5, a tedy 724 : 1 590 je menší než 0,5. Stručněji:

$$724 : 1\,590 < 750 : 1\,590 < 750 : 1\,500 = 0,5.$$

Závěr

Trénink odhadů na úlohách obdobného typu, které jsme zde uvedli, by měl mít své nezastupitelné místo při výpočtech ve všech tematických celcích školské matematiky. Jen tak si mohou žáci uvědomit význam odhadování v běžných životních situacích, výhodnost odhadů v matematických úlohách a naučí se s odhady pracovat.

[4] Zkušený čtenář výsledek odhadne přímo ze zadání.

L i t e r a t u r a

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 6. ročník, část 2. Prometheus, Praha, 2010.
[2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 9. ročník, část 2. Prometheus, Praha, 2013.
[3] *Odvárko, O. – Robová, J.*: Zaokrouhlování podruhé. Matematika-fyzika-informatika, roč. 16 (2007), č. 9, s. 513–520.
[4] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. MŠMT, Praha, 2013.
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Etruscan_shrew.
[6] Wikipedia (česká verze): https://cs.wikipedia.org/wiki/Odhad.
[7] Wikipedia (slovenská verze): https://sk.wikipedia.org/wiki/Odhad.

Pojem vzdálenosti ve školské matematice

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Tento příspěvek je konkretizací myšlenek uvedených v článku [7] *Pojem vzdálenosti v geometrii*, v němž jsem se dopustil závažné chyby. Zaměnil jsem totiž publikaci [10] *Standardy pro základní vzdělání* publikací [2] *Standardy a testové úlohy z matematiky*, z níž jsem vycházel. V publikaci [10] se o měření na několika místech mluví. Za tento omyl se autorům omlouvám.

Základní škola

Právě tak, jak prioritně, protože v naléhavé potřebě pro praxi, se rozvinula v dávné lidské společnosti potřeba měření vzdáleností, měl by se přirozeně budovat tento pojem i v matematickém vzdělávání. Že je to dobře možné již na prvním stupni základní školy dokazuje Milan Hejný zpracováním svých učebnic vydávaných nakladatelstvím Fraus [5]. První etapa seznamování dítěte s měřením vzdáleností je tzv. krokování, které