Literatura

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 6. ročník, část 2. Prometheus, Praha, 2010.
[2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 9. ročník, část 2. Prometheus, Praha, 2013.
[3] *Odvárko, O. – Robová, J.*: Zaokrouhlování podruhé. Matematika-fyzika-informatika, roč. 16 (2007), č. 9, s. 513–520.
[4] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. MŠMT, Praha, 2013.
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Etruscan_shrew.
[6] Wikipedia (česká verze): https://cs.wikipedia.org/wiki/Odhad.
[7] Wikipedia (slovenská verze): https://sk.wikipedia.org/wiki/Odhad.

Pojem vzdálenosti ve školské matematice

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Tento příspěvek je konkretizací myšlenek uvedených v článku [7] *Pojem vzdálenosti v geometrii*, v němž jsem se dopustil závažné chyby. Zaměnil jsem totiž publikaci [10] *Standardy pro základní vzdělání* publikací [2] *Standardy a testové úlohy z matematiky*, z níž jsem vycházel. V publikaci [10] se o měření na několika místech mluví. Za tento omyl se autorům omlouvám.

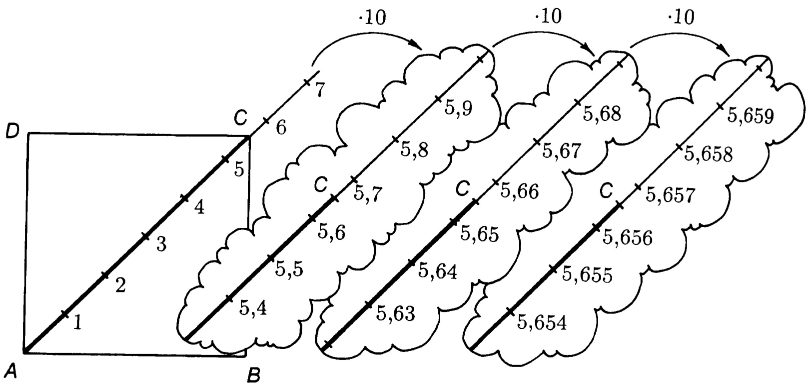
Základní škola

Právě tak, jak prioritně, protože v naléhavé potřebě pro praxi, se rozvinula v dávné lidské společnosti potřeba měření vzdáleností, měl by se přirozeně budovat tento pojem i v matematickém vzdělávání. Že je to dobře možné již na prvním stupni základní školy dokazuje Milan Hejný zpracováním svých učebnic vydávaných nakladatelstvím Fraus [5]. První etapa seznamování dítěte s měřením vzdáleností je tzv. krokování, které je ovšem spojeno s rozvíjením představ o malých přirozených číslech. Tato spjatost aritmetiky s geometrií je pro měření typická a vede, jak známo, k budování základních poznatků o reálných číslech ve vyšších třídách. V citovaných učebnicích měří žáci od druhé třídy délky na centimetry, metry i milimetry, měří délky stran trojúhelníku i jeho obvody, ba i obvod kruhu (na předmětech) i jeho průměr. V pátém ročníku se zavádějí v souvislosti s nákupy, ale i s měřením úseček, desetinná čísla a uvádějí se i čtverečné jednotky, v rozšiřujícím učivu pak např. i zlomky centimetrů (2/5 cm, ...).

Pozoruhodný přístup k tréninku přesnosti měření délek formou soutěže realizoval *Milan Hejný*; píše o ní v publikaci [4].

Konstrukci velikosti úsečky jako desetinného čísla můžeme žákům přiblížit podle obr. 1 z knihy [6] popisem procesu měření úhlopříčky čtverce o straně délky 4 cm. Začneme-li měřit s jednotkou cm, dostaneme pro délku $|AC|$ úhlopříčky AC:

$$5\,\text{cm} \leq |AC| \leq 6\,\text{cm}.$$



Obr. 1

Máme-li určit délku $|AC|$ přesněji, rozdělíme úsečku 1 cm na 10 shodných částí a provádíme pro velikost úsečky nový odhad. Abychom mohli tento postup ilustrovat obrázkem, představíme si stupnici desetinásobně zvětšenou. Vyjde

$$5{,}6\,\text{cm} \leq |AC| \leq 5{,}7\,\text{cm}.$$

K přesnějšímu odhadu bychom mohli (alespoň teoreticky) dále zjemňovat stupnici rozdělením úsečky 1 mm na 10 shodných dílů. Dostali bychom

$$5{,}656\,\text{cm} \leq |AC| \leq 5{,}657\,\text{cm}.$$

Měřením tak konstruujeme dolní a horní aproximaci velikosti úsečky $|AC|$, tedy čísla $4\sqrt{2}$, které získáme výpočtem podle Pythagorovy věty. Podle kalkulačky, která zobrazuje 32 desetinných míst, je

$$|AC| = 5{,}65682424938019520675489683 9\,\text{cm}.$$

Známým způsobem lze ovšem dokázat, že $|AC|$ je iracionální číslo, představit však jeho racionální aproximaci měřením úseček považuji za důležité.

Matematika na základní škole by se podle mého názoru měla orientovat na činnosti připravující matematické pojmy, na experimentování, modelování a řešení úloh. Tomuto přístupu odpovídají publikace [10] a [3], v nichž je zmíněným přístupům věnována náležitá pozornost. Předmětem matematiky základní školy nejsou matematické struktury vytvořené matematickou vědou, ale realita žákova světa, kterou se snaží studovat aritmetickými a geometrickými prostředky, tedy počítáním, rýsováním a modelováním. Přitom by se ovšem měla na konkrétní úrovni pěstovat argumentace. Žák by neměl odcházet z hodiny matematiky s přesvědčením, že dnes jsme dokazovali, že shodné trojúhelníky jsou shodné.

Střední škola

Na některé souvislosti pojmu vzdálenost s ostatními oblastmi elementární matematiky jsem se pokusil poukázat v článku [7] a v první části tohoto příspěvku.

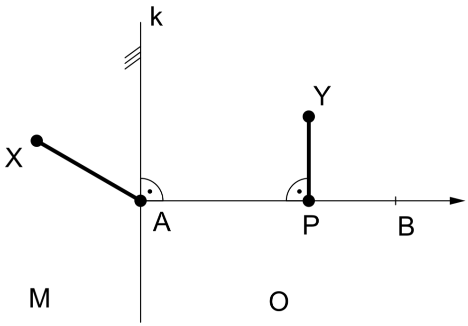
Gymnaziální matematika se s těmito důležitými otázkami vypořádává velkoryse již v prvním ročníku na samém začátku studia takto:

„Reálnými čísly nazýváme čísla, která jsou velikostmi úseček při zvolené jednotkové úsečce, čísla k nim opačná a nulu. Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem. Každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla“ ([1, s. 26]).

Tato formulace dobře odpovídá axiomům vzdálenosti a měřítka, které jsem citoval v článku [7]. Problém je v tom, že tento přístup bez bližšího výkladu o konstrukci velikosti úsečky měřením a řešení vhodných úloh může přispívat k nebezpečí formalismu ve vyučování. K zeslabení tohoto nebezpečí mají sloužit tyto úvahy o vzdálenosti.

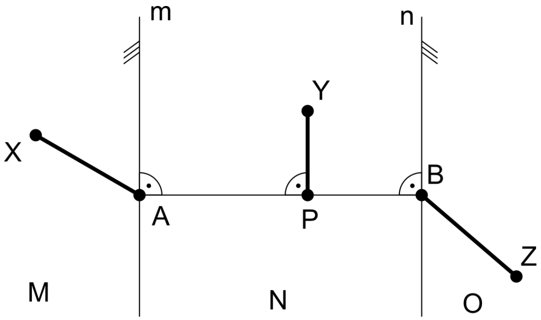
Znovu zdůrazňuji: Měření úseček je důležitý konstrukční prvek školské matematiky, který má výrazně posilovat spojení geometrie s aritmetikou, s teorií množin a logickými otázkami ve vyučování. Na pojmu vzdálenost je založena řada definic dalších geometrických útvarů, např. kružnice, kruh, osa úsečky, osa úhlu, kuželosečky, … Některé pojmy se vzdáleností související nejsou vůbec ve středoškolské matematice zavedeny, ačkoliv se běžně používají, např. vzdálenost bodu od geometrického útvaru a vzdálenost dvou útvarů. Připomeňme proto: Vzdálenost bodu A od geometrického útvaru U lze definovat jako nejmenší ze vzdáleností $d(A, X)$, kde X je libovolný bod útvaru U. Vzdálenost útvarů U, V pak jako nejmenší ze vzdáleností $d(X, Y)$, kde X je libovolný bod útvaru U, Y pak libovolný bod útvaru V. Tento přístup je ovšem možný jen pro tzv. uzavřené útvary, které obsahují všechny své hraniční body. Pro útvary *otevřené* (např. vnitřky dvou kruhů) by definice vzdálenosti vyžadovala pojem *infima*, který nebývá ve středoškolském učivu obvykle zařazován.

V souladu s předcházejícím výkladem postupujeme při určování vzdálenosti bodu od polopřímky následujícím způsobem. V označení podle obr. 2 platí: vzdálenost libovolného bodu Y poloroviny $O = kB$ od polopřímky AB je velikost úsečky YP, kde P je pata kolmice sestrojené z bodu Y na přímku AB. V polorovině M opačné k polorovině O znamená vzdálenost bodu X od polopřímky AB velikost úsečky XA.



Obr. 2

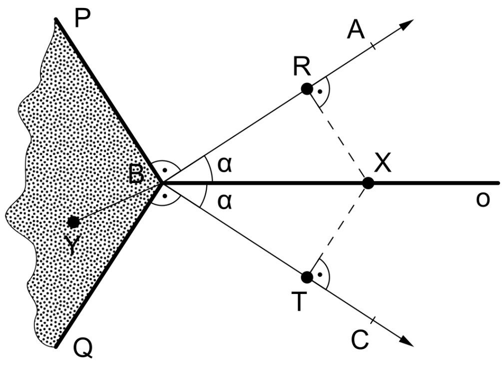
Podobně postupujeme u vzdálenosti bodu od úsečky. K určení vzdálenosti bodu od úsečky AB (obr. 3) sestrojíme po řadě v bodech A a B kolmice m, n k přímce AB, které rozdělí rovinu na tři oblasti M, N a O. V pásu N ohraničeném přímkami m a n měříme vzdálenost bodu Y od úsečky AB na kolmici k přímce AB. Je to velikost úsečky YP. V polorovině M opačné k polorovině mB je vzdálenost libovolného bodu X od úsečky AB velikost úsečky XA, v polorovině O opačné k polorovině nA je vzdálenost libovolného bodu Z od úsečky AB velikost úsečky ZB.



Obr. 3

Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od ramen BA a BC daného dutého úhlu ABC není osa o tohoto úhlu, ačkoliv tato odpověď se vyskytuje např. v učebnicích ([9, s. 73], [8, s. 63]).

Podle obr. 2 musíme totiž odlišit pro měření vzdálenosti bodu od ramen úhlu v označení podle obr. 4 čtyři oblasti: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ABP$, $\sphericalangle PBQ$ a $\sphericalangle QBC$. Protože každý bod Y úhlu PBQ má od obou ramen úhlu ABC stejnou vzdálenost, je řešením naší úlohy sjednocení úhlu PBQ s osou o úhlu ABC, neboť uvnitř úhlů ABP a QBC nemá žádný bod stejnou vzdálenost od ramene BA jako od ramene BC.



Obr. 4

Kdyby byl úhel ABC přímý, byla by hledanou množinou přímka p, která prochází bodem B a je kolmá k přímce AC.

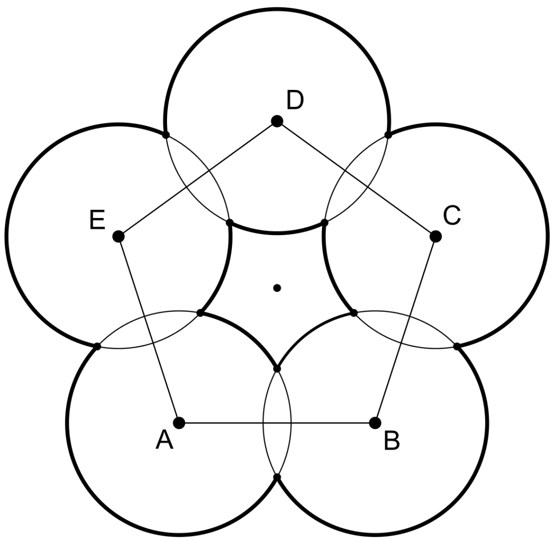
I v určování vzdálenosti dvou geometrických útvarů se v některých učebnicích vyskytují chyby. Např. výška trojúhelníku není vzdálenost jeho vrcholu od protilehlé strany a výšku lichoběžníku nelze definovat jako vzdálenost jeho základen. V případě potřeby můžeme podiskutovat se žáky o problematice např. nad lichoběžníkem se základnami 8 cm a 4 cm a rameny dlouhými 12 cm a 8 cm.

Ilustrujme nyní předcházející výklad několika úlohami.

Úloha 1

Určete množinu všech bodů roviny, které mají vzdálenost 2 *cm od množiny* $P = \{A, B, C, D, E\}$ *vrcholů pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru* 3 *cm.*

Výsledkem je sjednocení pěti shodných silně vyrýsovaných oblouků kružnic poloměru 2 cm vně pětiúhelníku a pěti oblouků kružnic téhož poloměru uvnitř pětiúhelníku (obr. 5). Podrobné zdůvodnění přenechám čtenáři.



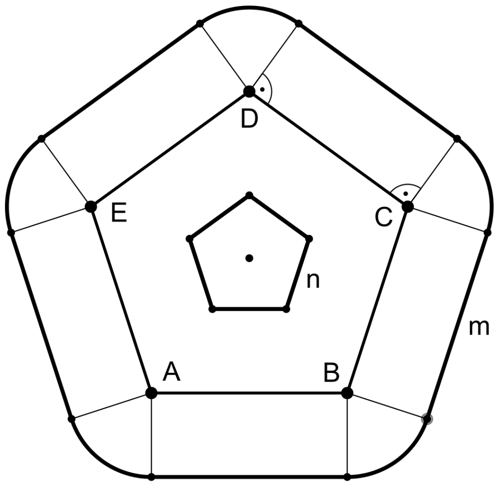
Obr. 5

V případě, že by daná vzdálenost byla např. 1 cm, bude výsledná množina sjednocení pěti kružnic poloměru 1 cm se středy v bodech A, B, C, D, E. V případě, že daná vzdálenost bude větší než 3 cm, bude výsledkem pětice kružnicových oblouků vně daného pětiúhelníku.

Úloha 2

Určete množinu všech bodů roviny, které mají vzdálenost 15 *mm od hranice pětiúhelníku $ABCDE$ vepsaného do kružnice poloměru* 30 *mm.*

Konstrukce výsledku (sjednocení hranice n pětiúhelníku uvnitř daného pětiúhelníku s čarou m složenou z úseček a oblouků kružnic) je patrná z obr. 6.



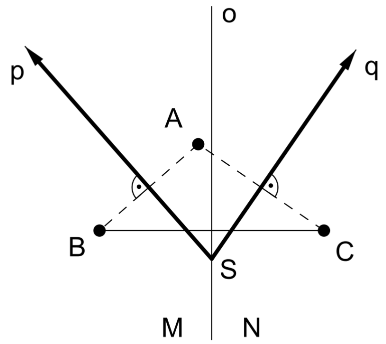
Obr. 6

Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od daných tří nekolineárních bodů je, jak známo, jednoprvková množina (střed kružnice opsané trojúhelníku ABC).

Úloha 3

Je dán trojúhelník ABC (obr. 7). Určete množinu všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu A jako od dvouprvkové množiny $D = \{B, C\}$.

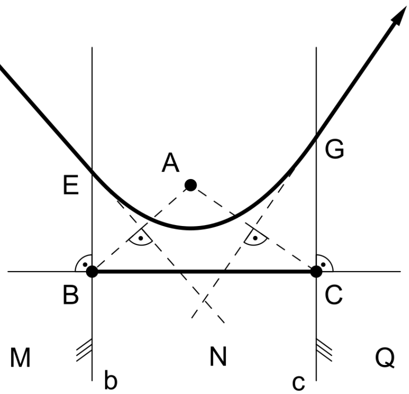
Sestrojme osu o úsečky BC. V polorovině $M = oB$ je vzdálenost bodu od množiny D rovna vzdálenosti tohoto bodu od bodu B, v polorovině $N = oC$ pak od bodu C. Hledaná množina je sjednocení polopřímek p, q s počátkem S, které jsou částmi os úseček AB a AC. Tato množina je hranicí dvou oblastí. Vnitřek úhlu, který obsahuje bod A, je množinou bodů, které jsou blíže k bodu A než k množině D. Vnitřek doplňkového úhlu je množinou všech bodů, které jsou blíže k množině D než k bodu A.



Obr. 7

Úloha 4

Je dán trojúhelník ABC (obr. 8). Určete množinu všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu A jako od úsečky BC.

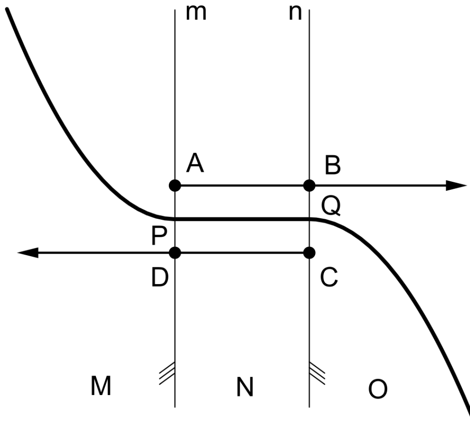


Obr. 8

V souladu s obr. 3 rozdělíme rovinu přímkami b a c na poloroviny M, Q a pás N. V pásu N měříme vzdálenost bodu od úsečky jako vzdálenost tohoto bodu od přímky a výsledkem je tedy oblouk EG paraboly s ohniskem A a řídící přímkou BC. Na oblouk EG pak navazují polopřímky, které jsou částmi os úseček AB a AC.

Úloha 5

Určete množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od polopřímek AB a CD na rovnoběžných přímkách podle obr. 9.



Obr. 9

Výsledkem této úlohy je sjednocení částí dvou parabol s úsečkou PQ, která je střední příčkou obdélníku $ABCD$.

Úloha 6

Jsou dány kružnice $m(M, 4\ cm)$, $n(N, 1\ cm)$; $|MN| = 8\ cm$. Určete množinu všech bodů jejich roviny, které jsou stejně vzdáleny od kružnice m jako od kružnice n.

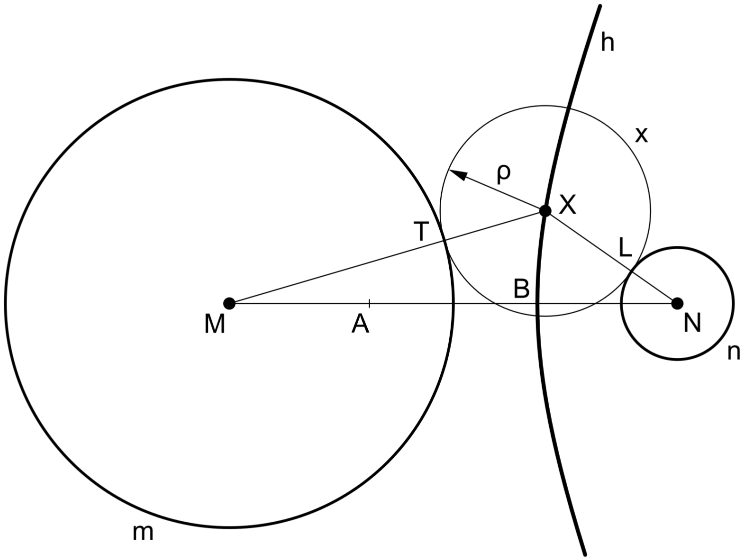
Jestliže je X libovolný bod, který splňuje podmínky úlohy, a ρ je jeho vzdálenost od každé z daných kružnic, je tento bod středem kružnice $x(X, \rho)$, která má s každou z nich vnější dotyk po řadě v bodech T a L (obr. 10). Protože platí

$$|MX| - 4 = |NX| - 1,$$

platí i

$$|MX| - |NX| = 3.$$

Bod X náleží tedy větvi h hyperboly s ohnisky M, N a hlavní osou délky 3 cm. Zřejmě každý bod této větve můžeme považovat za střed kružnice, která má s kružnicemi m, n vnější dotyk. Tato část hyperboly je tedy hledanou množinou.



Obr. 10

Shrnutí

Ačkoliv měření délek není v pravém slova smyslu matematickou činností, měli bychom mu věnovat již v matematice na základní škole mimořádnou pozornost. Je to činnost, která dala jméno celé oblasti matematiky a pojem vzdálenosti je základem důležitého matematického pojmu *metrický prostor*.

S měřením souvisí i práce s jednotkami míry a jejich převody, tedy s oblastí spjatou s praxí. Na okraj připomínám, že v roce 1988 shořela v atmosféře Marsu klimatické sonda *Mars Climate Orbiter*, neboť společnost, která řídila operaci během letu, poslala do řídícího centra NASA údaje o poloze pomocné rakety v mílích a stopách, tam se však domnívali, že jde o jednotky metrické.

Řešení úloh, které jsem na ukázku připomněl, umožňují spojovat experimentování a rýsování s teoretickými poznatky. Žáci tak mají možnosti rozvíjet své představy o matematických pojmech a jejich aplikacích. Hledáme-li množinu G, jejíž prvky mají vlastnost V, provádíme tak vlastně rozklad množiny bodů (roviny) na dvě oblasti: G je množina všech bodů, které mají vlastnost V a její doplněk G' je množina bodů, které vlastnost V nemají. Tento pohled lze samozřejmě rozvíjet i na tradičních úlohách školské matematiky. Je-li např. kružnice $k(S; r)$ množina všech bodů X roviny, pro které platí $|SX| = r$, pak vnitřek kruhu s hranicí k je množinou bodů X kružnice s průměrem AB, pro něž platí úhel AXB je tupý nebo přímý, vnějšek tohoto kruhu pak je množina těch bodů, pro něž platí úhel AXB je tupý nebo nulový. Rozklad příslušné množiny (např. roviny) je tak spojen s množinou všech možností odpovídajících dané výrokové formě.

Řešení úloh o vzdálenosti, jejichž příklady jsem zde uvedl, mohou být pro žáky zajímavé nejen hledáním postupu, ale v některých případech i „hezkým“ či překvapivým výsledkem. Úlohy vedou i k hlubšímu pochopení pojmu množina a její charakteristiky vlastnostmi jejích prvků. Tvořivý učitel si ovšem řadu úloh „praktické moudrosti“ s podobnou tematikou může sám vytvořit.

Literatura

[1] *Bušek, I., Boček. L., Calda, E.*: Matematika pro gymnázia. Základní poznatky z matematiky. Prometheus, Praha, 1992.

[2] *Fuchs, E., Hrubý, D. a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Prometheus, Praha, 2000.

[3] *Fuchs, E., Zelendová, E.*: Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání. NÚV, Praha, 2015.

[4] *Hejný, M., Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha, 2015.

[5] *Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J.*: Matematika pro 1. ročník základní školy. Fraus, Plzeň, 2007.

[6] *Kuřina, F. a kol.*: Matematika a porozumění světu. Academia, Praha, 2009.

[7] *Kuřina, F.*: Pojem vzdálenosti v geometrii. MFI, roč. 25, č. 4 (2016), s. 241–245.

[8] *Půlpán, Z., Trejbal, J.*: Matematika pro základní školy. 8. Geometrie. SPN, Praha, 2009.

[9] *Rosecká, Z., Míček, A.*: Geometrie. Učebnice pro 8. ročník. Nová škola, Brno, 1999.

[10] Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace. Dostupné na stránkách MŠMT.