Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 229 a 230 můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 229

Je dán obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 10$ a $|BC| = 6$. Pro vnitřní body P, Q strany AB platí $|AB| = 5|AP| = 4|QB|$. Označme T střed strany CD a U, V průsečíky úhlopříčky AC s úsečkami PT a QT. Určete poměr obsahů trojúhelníků UVT a ACD.

Jozef Mészáros

Úloha 230

Adámek dostal k Vánocům 2015 (správně seřízené, přesně jdoucí) mechanické hodinky s ukazatelem data 1–31. Vždy o půlnoci se číslo dne zvětší o 1, nebo číslo 31 přejde na 1. V březnu 2016 si Adámek všiml, že datum na hodinkách se neshoduje se skutečným číslem dne. Zjistěte den, měsíc a rok, kdy by opět poprvé došlo ke shodě, pokud by Adámek jako dosud data neseřizoval. Jak by se výsledek změnil, pokud by Adámek dostal hodinky o Vánocích 2014? Najděte racionální způsob výpočtu.

Stanislav Trávníček

Dále uvádíme řešení úloh 225 a 226, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 225

Určete počet všech uspořádaných šestic (a, b, c, d, e, f) přirozených čísel, jejichž součet je 2 016, a přitom všechny zlomky

$$\frac{a+b}{c+d},\quad \frac{b+c}{d+e},\quad \frac{c+d}{e+f},\quad \frac{d+e}{f+a},\quad \frac{e+f}{a+b},\quad \frac{f+a}{b+c}$$

mají celočíselné hodnoty.

Jaroslav Švrček

Řešení. Protože a, b, c, d, e, f jsou přirozená čísla a zlomky nabývají celočíselné hodnoty, je tato hodnota přirozeným číslem. Vynásobením prvního, třetího a pátého zlomku dostaneme

$$\frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{c+d}{e+f} \cdot \frac{e+f}{a+b} = 1.$$

Tedy hodnoty všech tří zlomků jsou nutně rovny jedné a platí

$$a+b = c+d, \tag{1}$$
$$c+d = e+f. \tag{2}$$

Podobnou úvahou pro druhý, čtvrtý a šestý zlomek dostaneme

$$b+c = d+e, \tag{3}$$
$$d+e = f+a. \tag{4}$$

Sečtením rovnic (1) a (4), respektive (2) a (3) dostaneme po úpravě

$$b+e = c+f, \tag{5}$$
$$b+2c = 2e+f. \tag{6}$$

Odečtením rovnic (5) a (6) pak po úpravě získáme $c = e$. Z rovnice (5) tak plyne $b = f$. Z rovnice (2) dále obdržíme $d = f$ a konečně z rovnice (4) máme $a = e$. Proto platí $a = c = e$ a $b = d = f$. Vidíme, že za těchto podmínek jsou hodnoty všech zadaných zlomků rovny 1.

Protože součet všech zadaných čísel a, b, c, d, e, f je 2016, plyne odtud $a + b = 672$. Snadno vidíme, že existuje 671 dvojic přirozených čísel (a, b), která vyhovují této rovnici, jsou to dvojice $(1; 671), (2; 672), \ldots, (671; 1)$.

Existuje tak 671 uspořádaných šestic (a, b, c, d, e, f) čísel vyhovujících zadání.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Veronika Hladíková* a *Klára Karasová*, obě z G v Plzni, Mikulášské nám., *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Danil Koževnikov* a *Jan Petr*, oba z GJK v Praze 6, Parléřova, *Jakub Mestek* z G v Jihlavě, Jana Masaryka, *Josef Minařík* a *Ondřej Svoboda*, oba z G v Brně, Kpt. Jaroše, *Ondřej Motlíček* z G v Šumperku, *Hedvika Ranošová* z G v Praze 4, Budějovická, *Martin Raška* a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě a *Jáchym Solecký* z PORG v Praze 8.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

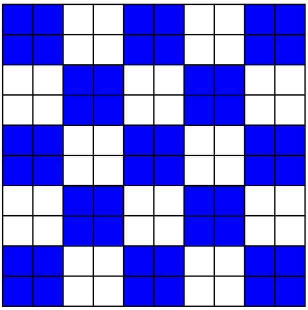
Úloha 226

Na každém poli šachovnice 10×10 sedí jedna blecha. Po tlesknutí přeskočí každá blecha ve směru řádku nebo sloupce právě jedno pole a dopadne opět na šachovnici. Poté na některých polích šachovnice bude několik blech a některá pole zůstanou prázdná. Určete nejmenší možný počet prázdných polí.

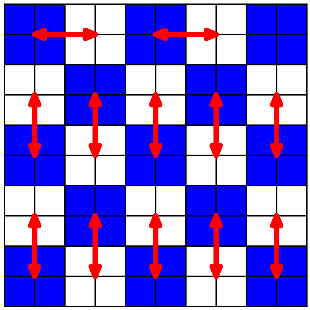
Pavel Calábek

Řešení. Obarvěme pole šachovnice tak, jak vidíte na obrázku 1. Je na něm 52 tmavých polí a 48 světlých polí. Po tlesknutí přeskočí každá blecha ze světlého pole na tmavé anebo z tmavého pole na světlé. Proto po tlesknutí zbude aspoň $52 - 48 = 4$ tmavých prázdných polí.

Pokud blechy přeskočí mezi poli tmavých a světlých čtverců tak, jak je naznačeno na obr. 2 a blechy z horního pravého tmavého čtverce přeskočí na libovolné vhodné pole, zbudou na šachovnici právě 4 prázdná pole.



Obr. 1



Obr. 2

Na šachovnici proto po tlesknutí zůstanou aspoň 4 volná pole.

Správná řešení zaslali *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Veronika Hladíková* a *Klára Karasová*, obě z G v Plzni, Mikulášské nám., *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Jan Petr*, z GJK v Praze 6, Parléřova, *Josef Minařík* a *Ondřej Svoboda*, oba z G v Brně, Kpt. Jaroše, *Hedvika Ranošová* z G v Praze 4, Budějovická, *Martin Raška* z WG v Ostravě-Porubě, *Jáchym Solecký* z PORG v Praze 8,

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, Parléřova a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě.

Pavel Calábek