[3] *Dujella, A.*: The problem of the extension of a parametric family of Diophantine triples, Publ. Math. Debrecen **51** (1997).

[4] *Dujella, A.*: What is a Diophantine m-tuple? Notices of the Amer. Math. Soc., **63** (7), (2016).

[5] *Dujella, A.*: An absolute bound for the size of Diophantine m-tuples. Journal of Number Theory **89** (2001).

[6] *Fujita, Y.*: Any Diophantine quintuple contains a regular Diophantine quadruple. Journal of Number Theory **129** (2009).

[7] *Gibbs, P.*: Some rational Diophantine sextuples. Glas. Mat. Ser. III, Soft Computing **41** (2006).

[8] *Kedlaya, K. S.*: Solving constrained Pell equations. Math. Comp **67** (1998).

[9] *Veluppillai, M.*: The equations $z^2 - 3y^2 = -2$ and $z^2 - 6x^2 = -5$. A Collection of Manuscripts Related to the Fibonacci sequence, The Fibonacci Association, Santa Clara, 1980.

[10] 35. ročník MO na středních školách, SPN, Praha, 1988.

Polibky kružnic: Jakob Steiner, 1. část

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Již ve starověkém Řecku bylo známo: Pokud sečna z vnějšího bodu X protíná kružnici $k(O;r)$ v bodech A, B a tečna z téhož bodu má s kružnicí dotyk v bodě T, pak

$$|AX| \cdot |BX| = |AT|^2. \tag{1}$$

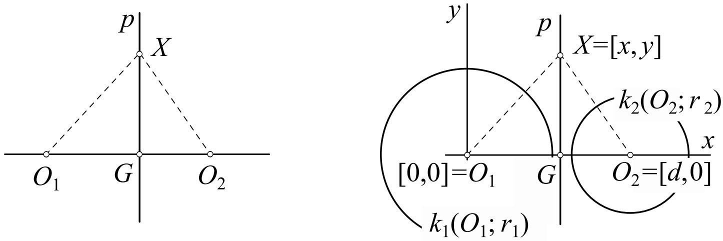
Eukleidovy *Základy* uvádí i analogickou větu pro vnitřní bod kružnice. Rovněž byla známa analogická věta pro vnitřní bod X kružnice k. Jakob Steiner (1796–1863) ve své první knižně vydané práci [2] tyto poznatky rozšířil. Zavedl veličinu zvanou *mocnost bodu ke kružnici* nebo též *mocnost kružnice k bodu*, kterou v dané rovině chápal jako charakteristiku vzájemné polohy libovolného bodu X a pevně zvolené kružnice k, resp.

jako charakteristiku polohy libovolné kružnice k vzhledem k pevně zvolenému bodu X.[1] Stručně ji lze definovat vztahem $\mu(X,k) = |OX|^2 - r^2$.

Poznamenejme, že mocnost úzce souvisí s analytickým vyjádřením kružnice: V kartézské soustavě souřadnic pro $O = [m,n]$ a $X = [x,y]$ je

$$\mu(X,k) = (x-m)^2 + (y-n)^2 - r^2. \tag{2}$$

Kružnice $k(O;r)$ má tedy rovnici $\mu(X,k) = 0$ a bod X je jejím vnějším, resp. vnitřním bodem, právě když $\mu(X,k) > 0$, resp. $\mu(X,k) < 0$.



Obr. 1 Množina bodů X (vlevo) a chordála p kružnic k_1, k_2 (vpravo)

Steiner nejprve hledal množinu všech bodů v rovině, které mají ke dvěma kružnicím stejnou mocnost, tzv. *chordálu dvou kružnic*. Vyšel z poznatku, že pro body O_1, O_2 a G ležící v dané rovině na téže přímce je množinou všech bodů X s vlastností

$$|O_1X|^2 - |O_1G|^2 = |O_2X|^2 - |O_2G|^2$$

kolmice p na přímku O_1O_2 v bodě G (viz obr. 1 vlevo). Poslední vztah upravil na ekvivalentní tvar

$$|O_1X|^2 - |O_2X|^2 = |O_1G|^2 - |O_2G|^2 \tag{3}$$

a pak bodům O_1, O_2 přiřadil kružnice $k_1(O_1;r_1)$, $k_2(O_2;r_2)$ libovolných poloměrů (obr. 1 vpravo). Bod X má k těmto kružnicím stejnou mocnost, právě když platí

$$|O_1X|^2 - r_1^2 = |O_2X|^2 - r_2^2,$$

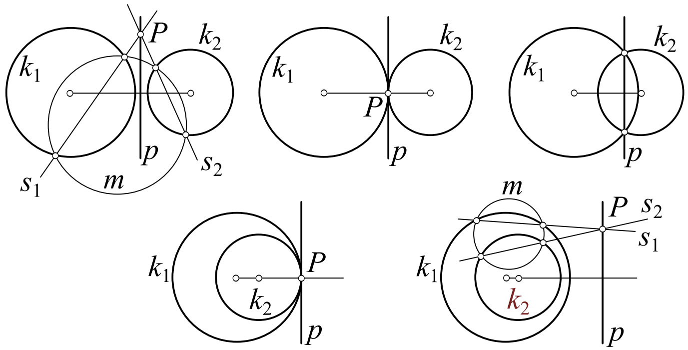
neboli

$$|O_1X|^2 - |O_2X|^2 = r_1^2 - r_2^2. \tag{4}$$

[1] V originále *Potenz des Punkts in Bezug auf den Kreis*, resp. *Potenz des Kreises in Bezug auf den Punkt*. Česká terminologie název *mocnost kružnice k bodu* neužívá.

Ze vztahů (3) a (4) nakonec usoudil, že chordálou kružnic k_1 a k_2 je přímka p při umístění bodu $G \in O_1O_2$ tak, aby platilo

$$|O_1G|^2 - |O_2G|^2 = r_1^2 - r_2^2. \tag{5}$$



Obr. 2 Chordála p pro různé vzájemné polohy kružnic k_1 a k_2

Stejný výsledek lze získat i analyticky. Při volbě kartézské soustavy souřadnic podle obr. 1 vpravo má podmínka $\mu(X, k_1) = \mu(X, k_2)$ tvar

$$x^2 + y^2 - r_1^2 = (x - d)^2 + y^2 - r_2^2$$

a odtud

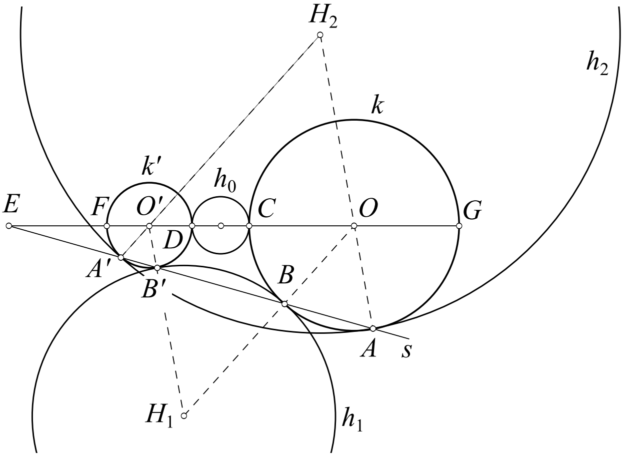
$$p\colon x = \frac{d}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2d} \;\; (= |O_1G|).$$

Chordála kružnic $k_1(O_1; r_1)$ a $k_2(O_2; r_2)$ je tedy kolmice p k přímce O_1O_2 vedená kterýmkoliv bodem, jenž má k oběma kružnicím stejnou mocnost. Nemají-li kružnice společný bod, můžeme ji snadno sestrojit užitím pomocné kružnice m, která má s kružnicemi k_1 a k_2 různoběžné společné sečny s_1 a s_2 (obr. 2 vlevo nahoře a vpravo dole). Jejich průsečík P má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím. Nazývá se *potenční střed* kružnic k_1, k_2 a m.

Uvažujme dále kružnice $k(O; r)$ a $k'(O'; r')$ s vnějším středem E stejnolehlosti $\mathcal{H}_{E,\lambda}\colon k \to k'$. Sečna $s \neq OO'$ z bodu E protíná kružnici k v bodech B, A a kružnici k' v jejich obrazech $A' = \mathcal{H}_{E,\lambda}(B)$ a $B' = \mathcal{H}_{E,\lambda}(A)$ (obr. 3). Označme po řadě H_1 a H_2 průsečíky přímek OB, $O'B'$ a OA, $O'A'$. Snadno lze ověřit, že

$$|\sphericalangle H_1BB'| = |\sphericalangle O'A'B'| = |\sphericalangle A'B'O'| = |\sphericalangle H_1B'B|.$$

Trojúhelník $BB'H_1$ je tedy rovnoramenný a kružnice $h_1(H_1; |H_1B|)$ se vně dotýká kružnic k a k' v bodech B a B'. Analogicky má i kružnice $h_2(H_2; |H_2B|)$ vnitřní dotyky s kružnicemi k a k' v bodech A a A'. V předchozím článku [1] jsme dokázali i obrácené tvrzení: Jestliže má nějaká kružnice dotyky T a T' téhož typu s kružnicemi k a k', pak přímka TT' prochází bodem E.[2]



Obr. 3 Společná mocnost kružnic k a k' k jejich středu stejnolehlosti E

Bod E má ke kružnici k mocnost $\mu = |EA| \cdot |EB| = |EC| \cdot |EG|$ a je středem stejnolehlosti s koeficientem

$$\lambda = |EB'|/|EA| = |EA'|/|EB| = |ED|/|EG| = |EF|/|EC|.$$

Pro součin obou konstant platí

$$c = \lambda\mu = |EB| \cdot |EB'| = |EA| \cdot |EA'| = |EC| \cdot |ED| = |EF| \cdot |EG|. \quad (6)$$

Analogický vztah lze odvodit i pro vnitřní střed stejnolehlosti kružnic. Konstantu c nazveme (v souladu se Steinerovým „gemeinschaftliche Potenz“ a anglickým „common power“) *společná mocnost kružnic k a k' vzhledem k jejich středu stejnolehlosti E.*

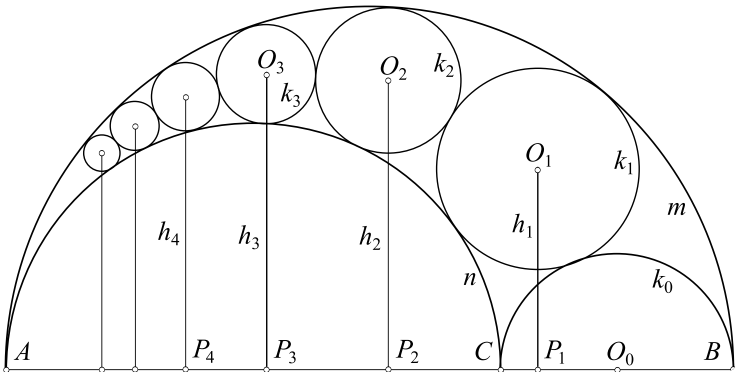
[2] Zkušenější čtenář zajisté poznal, že jde o důsledky Mongeovy věty o skládání stejnolehlostí.

Ze vztahu (6) plynou dva důsledky:

T1. Bod E má stejnou mocnost c ke každé z kružnic $h_0, h_1, h_2, \ldots$, jež se dotýkají kružnic k a k' tak, že jsou dotyky buď oba vnitřní, nebo oba vnější.

T2. Rovnicí (6) je dána kruhová inverze se základní kružnicí $z(E, \sqrt{c})$, která zobrazuje kružnici k na kružnici k' a každou z kružnic h_i na sebe.

Nutno zmínit, že Steiner postupoval jinak. Zde jsme uvedli rychlejší cestu a to jen k poznatkům, které budeme potřebovat. Termín *kruhová inverze* byl zaveden později. Z nepublikovaných Steinerových prací je známo, že inverzi užíval. Je prvním známým matematikem, který po éře starověku znovu objevil kruhovou inverzi.



Obr. 4 Řetězec kružnic vepsaných do arbelu

Zmíněné výsledky Steiner využil ke zjednodušení důkazu Pappova *starodávného tvrzení*, podle nějž pro kružnice $k_j(O_j; r_j)$ vepsané do arbelu na obr. 4 platí $h_j = 2jr_j$ (podrobněji viz [1]). Uvedl, že podíly h_j/r_j, kde $j = 0, 1, 2, \ldots$, tvoří i pro jiné řetězce kružnic analogicky vepsaných mezi kružnice m a n aritmetickou posloupnost

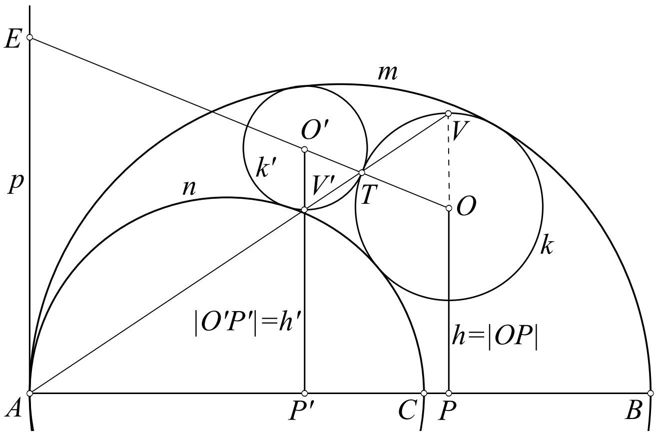
$$\frac{h_0}{r_0}, \quad \frac{h_0}{r_0} + 2, \quad \frac{h_0}{r_0} + 4, \ \ldots, \tag{7}$$

přičemž v arbelu z obr. 4 je $h_0 = 0$. Důkaz učinil odvozením rekurentního vztahu

$$\frac{h'}{r'} = \frac{h}{r} + 2 \tag{8}$$

pro dvě sousední kružnice řetězce.

Na obr. 5 je T bod dotyku kružnic k a k'. Paty kolmic z jejich středů O, O' na přímku AB jsou po řadě P, P'. Bod V' je průsečík kružnice k' s úsečkou $O'P'$ a bod V průsečík kružnice k s polopřímkou opačnou k polopřímce OP. Společná tečna p kružnic m a n je jejich chordálou. Kružnice k a k' mají s kružnicí m vnitřní dotyk a s kružnicí n vnější dotyk. Vnější střed E stejnolehlosti kružnic k a k' má podle důsledku T1 tutéž mocnost $|ET|^2$ ke kružnicím m a n – situace z obr. 3 pro $C = D\,(= T)$. Leží tedy na jejich chordále p a platí $\mu(E,m) = \mu(E,n) = |AE|^2$. Z rovnosti $|ET|^2 = |AE|^2$ plyne $|ET| = |AE|$. Rovnoramenné trojúhelníky ATE a $V'TO'$ jsou podobné a proto leží body A, V' a T na přímce. Z rovnoběžnosti úseček OV a $O'V'$ plyne podobnost trojúhelníků TOV a $TO'V'$. Z ní pak vztah $V \in V'T$.



Obr. 5 K důkazu vztahu (8)

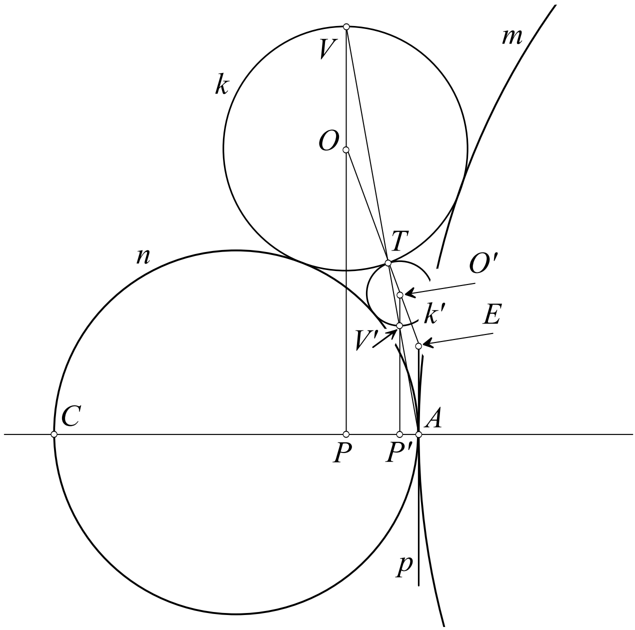
Postupným využitím podobnosti trojúhelníků $AP'V'$ a APV, faktu, že rovnoběžné promítání ve směru přímky p zachovává poměry odpovídajících úseků na přímkách AB a EO, a vnější stejnolehlosti kružnic k' a k určíme

$$\frac{h'-r'}{h+r} = \frac{|P'V'|}{|PV|} = \frac{|AP'|}{|AP|} = \frac{|EO'|}{|EO|} = \frac{r'}{r} \tag{9}$$

a odtud po ekvivalentní úpravě vztah (8).

Jak víme z [1], Pappos zkoumal i ty konfigurace, jejichž základem byly kružnice m a n s vnějším dotykem v bodě A. Steiner se jimi též zabýval.

Na obr. 6 vidíme analogii situace z obr. 5 pro tzv. druhou konfiguraci. Snadno lze ověřit, že platí všechny vztahy z předchozího postupu, tedy i (8).

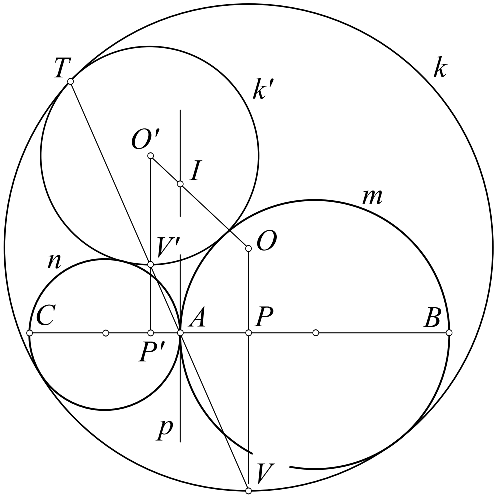


Obr. 6 Druhá konfigurace kružnic

U třetí konfigurace (obr. 7) je tomu jinak. Kružnice m a n mají s kružnicí k vnitřní dotyk a s kružnicí k' vnější dotyk. Vnějšímu středu E z obr. 5 zde odpovídá vnitřní střed I stejnolehlosti kružnic k a k'. Postup je opět stejný až na to, že v posloupnosti kroků (9) bude ve jmenovateli prvního zlomku výraz $r - h$ místo původního $r + h$. Pro tuto konfiguraci má proto výsledný vztah tvar

$$\frac{h'}{r'} = 2 - \frac{h}{r}. \tag{10}$$

Příště si ukážeme, jak Steiner odvodil Descartesovu větu o dotýkajících se kružnicích.



Obr. 7 Třetí konfigurace kružnic.

Úlohy

1. Sestrojte potenční střed tří kružnic, z nichž žádné dvě nemají společný bod.
2. Pozměňte obr. 3 tak, aby se v něm místo vnějšího středu E vyskytoval vnitřní střed I stejnolehlosti kružnic k a k'. Pak odvoďte vztah pro společnou mocnost bodu I k těmto kružnicím a zdůvodněte, proč má bod I stejnou mocnost ke každé kružnici, jejíž dotyk je s jednou z kružnic k a k' vnitřní, a s druhou vnější.
3. Překreslete obr. 3 pro ty situace, kdy se kružnice k a k' a) protínají, b) dotýkají, c) jedna z nich leží uvnitř druhé. Potom pro ně ověřte platnost vztahu (6). Totéž proveďte pro vnitřní střed stejnolehlosti kružnic k a k'.
4. Dokažte vztah (10).

Literatura

[1] *Leischner, P.:* Polibky kružnic: Pappos Alexandrijský, MFI, roč. 25 (2016), č. 1, s. 1–11.

[2] *Steiner, J.:* Einige geometrische Betrachtungen (1826), Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1901.