O jedné cestě z geometrie přes aritmetiku k algebře a zpět

FILIP ROUBÍČEK

Matematický ústav AV ČR, Praha

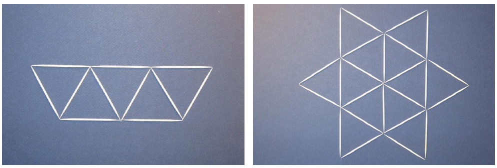
Vzdělávání je společností často nahlíženo v kontextu jejích proměn a aktuálních požadavků, proto zamyšlení se nad otázkou *Co, jak a proč se má ve škole vyučovat?* je stále aktuální. Přestože matematika představuje jeden z hlavních oborů základního vzdělání, jehož vzdělávací obsah zůstává ve srovnání s jinými obory dlouhá léta téměř neměnný, didaktici matematiky neustávají v hledání cest, jak matematické vzdělávání zkvalitňovat, jak zefektivnit vyučovací proces, jak motivovat děti k učení se matematice. Mnohé zapomenuté myšlenky se opět vynořují a uplatňují v novém společenském kontextu s ohledem na podmínky a potřeby školské praxe.

V přístupech, které jsou v současném matematickém vzdělávání prosazovány [4], je kladen důraz na aktivizaci žáků ve vyučování a uplatňování postupů, které napomáhají jejich porozumění matematice a tím usnadňují její aplikaci. Všeobecně se uznává, že učitel, který vede žáky k aktivnímu přístupu k učení se matematice, vytváří podmínky pro zkvalitnění jejich matematického poznání i pro zvýšení jejich zájmu o matematiku. V rámci své výuky poskytuje žákům prostor pro matematickou diskusi, kladení otázek, formulování domněnek, vzájemné sdílení řešitelských postupů a další formy prezentace jejich matematického uvažování. Do výuky zařazuje modelování, experimentování, analyzování dat a jiné postupy, které žákům přirozeně nabízejí příležitosti k zobecňování a zdůvodňování. Učitel aktivizuje žáky také tím, že podporuje jejich snahu problém vyřešit, reflektuje jejich zjištění a hodnotí význam zjištěného pro řešení problému. To od něj vyžaduje schopnost pružně a správně reagovat na různé žákovské podněty.

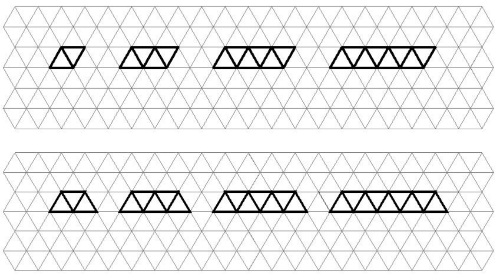
Kromě zajištění podmínek pro autonomní a kooperativní učení je nutné věnovat pozornost matematickému obsahu předkládaných úloh nebo úkolů a zvážit, zda žáci jsou dostatečně vybaveni poznatky pro jejich řešení. Východiskem pro žákovská objevování bývají otevřené matematické úlohy, tedy takové, které popisují neurčitou, nejednoznačnou nebo žákům neznámou matematickou situaci a požadují její komplexní prozkoumání. Neurčitá vstupní situace nabízí řešiteli možnost rozhodnout se, jakými případy se bude zabývat, a vybrat si cesty, kterými se vydá. Žáky nepřiměje k objevování jednoduchá úloha, kterou vyřeší naučeným postupem, ale ani složitá úloha, kterou nedovedou správně uchopit jim dostupnými matematickými prostředky. V některých případech je třeba iniciovat žákovské objevování diskusí, při které si žáci spíše uvědomí, jak mohou uvažovat a jakým způsobem lze zadanou situaci prozkoumat. Vhodným podnětem pro objevování může být také pro žáky neobvyklé prostředí, v němž je situace zadána.

Specifické prostředí jako podnět k objevování

Příkladem specifického prostředí v planimetrii je konstruování útvarů ve čtvercové síti nebo v pravidelné trojúhelníkové síti. Proces objevování pravidelností ukážeme na geometrických obrazcích, které jsou sestaveny ze shodných rovnostranných trojúhelníků. Takové obrazce můžeme vytvořit například pomocí párátek, jak je znázorněno na obr. 1. Je však třeba upozornit, že modelování pomocí párátek přináší úskalí v tom, že umožňuje vytvářet obrazce ze shodných rovnostranných trojúhelníků, které nerespektují trojúhelníkovou síť. Tomuto problému lze předejít tím, že žákům poskytneme pro záznam sestavených obrazců listy papíru s předtištěnou trojúhelníkovou sítí (obr. 2).



Obr. 1 Příklady obrazců sestavených z párátek

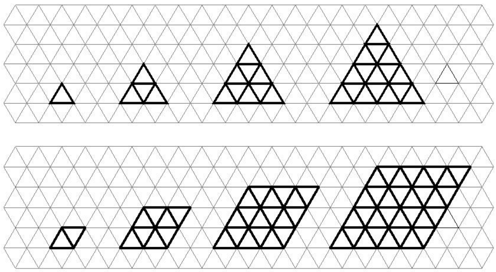


Obr. 2 Posloupnosti rovnoběžníků a lichoběžníků v trojúhelníkové síti

V prostředí trojúhelníkové sítě zadáme žákům následující úlohu:

Sestavte různé obrazce tvořené shodnými rovnostrannými trojúhelníky ze třech párátek. Zjistěte, kolik párátek je potřeba k sestavení nějakého většího obrazce.

Úloha je otevřená v tom, že neurčuje tvar a velikost výchozího obrazce ani způsob jeho zvětšování. Tato skutečnost umožňuje přirozenou diferenciaci ve třídě, tzn. přizpůsobit obtížnost úlohy schopnostem jednotlivých žáků. Je na žáků jako řešiteli, aby si vymezil oblast svého zkoumání a určil případy, jimiž se bude zabývat. Je zřejmé, že je snazší začít hledat pravidelnosti na jednodušších obrazcích, jako jsou rovnoběžníky, rovnoramenné lichoběžníky nebo rovnostranné trojúhelníky (obr. 2 a 3), než se hned zabývat složitějšími obrazci, jako je šesticípá hvězda na obr. 1.



Obr. 3 Posloupnosti trojúhelníků a kosočtverců v trojúhelníkové síti

Uvedená úloha vychází z geometrického prostředí, ale jejím výstupem je popis určité pravidelnosti, resp. aritmetické nebo algebraické vyjádření změny velikosti obrazce. Přitom prodlužování v jednom směru (viz posloupnost kosodélníků nebo rovnoramenných lichoběžníků na obr. 2) se vyznačuje jinou kvantitativní změnou než zvětšování ve dvou směrech (viz posloupnost rovnostranných trojúhelníků nebo kosočtverců na obr. 3, kde se jedná o posloupnosti podobných obrazců, neuvažujeme-li úsečky uvnitř útvaru). V případě prodlužování bude výsledkem lineární závislost, zatímco ve druhém případě půjde o závislost kvadratickou, jak ukážeme dále.

Některé řešitelské strategie

Při zkoumání pravidelností mohou žáci využít různé přístupy. Mladší žáci nebo žáci, kteří z různých důvodů upřednostňují konkrétní objekty před abstraktními, nejčastěji volí postup, kdy modelují obrazce z párátek (případně je zakreslují do trojúhelníkové sítě) a párátka (resp. úsečky) postupně počítají. Tato strategie je obvyklá i u ostatních žáků v počátku zkoumání, kdy se snaží zorientovat v neznámé situaci a matematicky ji uchopit. Následně někteří žáci ustupují od vytváření konkrétních modelů a pracují pouze s počty párátek. Posloupnost obrazců nahrazují číselnou posloupností a pozorují kvantitativní změny. Nalezenou pravidelnost se poté snaží popsat aritmeticky. Žáci, kteří dovedou vztahy abstrahovat, modelují složitější obrazce pomocí jednodušších a vyvozují aritmetické nebo algebraické vyjádření změny počtu párátek pro další případy z popsaných vztahů.

Na základě pozorování byly vymezeny tři základní řešitelské strategie (resp. úrovně řešení):

a) modelování posloupnosti obrazců pomocí párátek (případně jejich grafické znázorňování) a postupné určování počtu párátek

b) modelování posloupnosti obrazců pomocí čísel (vyjadřujících počet párátek) a hledání aritmetické pravidelnosti

c) modelování složitějšího obrazce pomocí jednodušších a aritmetické nebo algebraické vyvozování

První z uvedených strategií je založena na manipulaci s konkrétními modely, kterou žáci volí většinou jen na začátku řešení úlohy. V průběhu řešení, kdy nahlédnou určité souvislosti, tuto strategii zcela nebo částečně opouštějí a zkoumají kvantitativní změny prostřednictvím aritmetických vztahů. Opora konkrétního modelu se však znovu objevuje při zkoumání složitějších obrazců. Správně algebraicky popsat vztahy mezi počty párátek (tj. vyjádřit jejich počty pomocí proměnné) zejména ve složitějších případech se daří jen některým žákům, kteří dovedou pracovat s algebraickými výrazy a provádět jejich úpravy.

Uvedené strategie můžeme názorně ilustrovat na příkladu posloupnosti rovnoběžníků a lichoběžníků na obr. 2. V případě strategie a) žáci nejprve sestaví nejjednodušší rovnoběžník, který je tvořen dvěma shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Jde o kosočtverec sestavený z pěti párátek. Poté jednu jeho stranu prodlouží o jedno párátko, doplní na kosodélník složený ze dvou shodných kosočtverců a určí celkový počet párátek devět. Tímto způsobem pokračují a postupně určují počty párátek pro další kosodélníky. Počet párátek v dalším obrazci většinou zjišťují opakovaným přepočítáváním párátek po jednom. Někteří žáci si po určitém počtu kroků uvědomí, že další prodloužený kosodélník získají přidáním čtyř párátek. Toto zjištění však vychází z manipulativní činnosti s konkrétními modely a je podloženo zkušeností z víceméně mechanického modelování kosodélníků, příp. jejich zakreslování do trojúhelníkové sítě.

Určení počtu párátek u několika prvních rovnoběžníků se stává východiskem pro nahrazení posloupnosti rovnoběžníků číselnou posloupností 5, 9, 13, 17, ..., tzn. žáci přecházejí ke strategii b). Doplní posloupnost o další čísla 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ... a objevují pravidelnost prostřednictvím uvedené číselné posloupnosti bez opory konkrétních modelů. Určují diferenci mezi čísly a objevenou pravidelnost vyjadřují slovy „další je vždy o čtyři větší“ nebo „dál to bude plus čtyři“. Odpověď na otázku, kolik párátek potřebujete na kosodélník, který má stranu dlouhou 10, buď zjistí postupným dopočítáním $29 + 4 + 4 + 4 = 41$, nebo vyjádří výpočtem $5 + 9 \cdot 4 = 41$, zatímco žáci upřednostňující strategii a) kosodélník se stranou dané délky nejprve vymodelují. Uvedený výraz je už jen krůčkem k zobecnění pro kosodélník s libovolnou délkou strany n. Vodítkem pro vyvození obecného vztahu $5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$ je určení počtu párátek pro další konkrétní délky stran, např.

pro $n = 10$: $5 + (10 - 1) \cdot 4 = 5 + 36 = 41 = 4 \cdot 10 + 4$

pro $n = 20$: $5 + (20 - 1) \cdot 4 = 5 + 76 = 81 = 4 \cdot 20 + 4$

pro $n = 50$: $5 + (50 - 1) \cdot 4 = 5 + 196 = 201 = 4 \cdot 50 + 4$

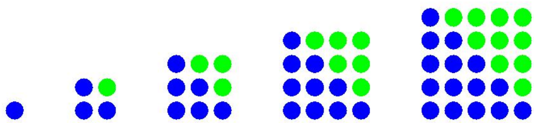
pro $n = 100$: $5 + (100 - 1) \cdot 4 = 5 + 396 = 401 = 4 \cdot 100 + 4$

Volba strategie se zřetelně projeví při změně posloupnosti obrazců, například místo rovnoběžníků žáci zkoumají lichoběžníky (viz obr. 2). V případě strategie a) žáci celý proces opakují od začátku, tzn. modelují jednotlivé lichoběžníky a postupně určují počty párátek. Žáci, kteří použijí strategii b), vyjdou z nové řady čísel 7, 11, 15, 19, 24, ..., opět určí diferenci a pomocí ní vyjádří hledaný počet. Objeví se však i žáci, kteří jsou schopni abstrahovat a získané poznatky využít pro nový případ. Takovým žákům je vlastní strategie c) – uvědomí si, že lichoběžník vznikne z rovnoběžníku přidáním dvou párátek, a zobecněný vztah pro rovnoběžník upraví snadno na vztah pro lichoběžník $4n + 1 + 2 = 4n + 3$.

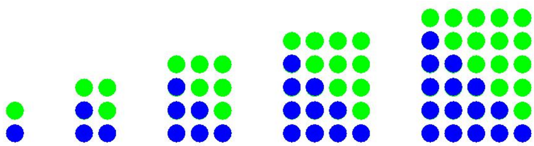
Hledání souvislostí

Řešení otevřených úloh často vyžaduje propojovat poznatky z různých oblastí matematiky, tedy schopnost nahlížet zkoumané situace z různých úhlů pohledu a popisovat je prostřednictvím různých matematických nástrojů, jak bylo naznačeno výše. Popsané strategie, které žáci použili při řešení uvedené úlohy a ve kterých žáci popisují posloupnosti obrazců v trojúhelníkové síti, které vznikly prodloužením jednoho jejich rozměru, pomocí aritmetických, příp. algebraických prostředků, zaznamenáme i v případě druhého způsobu zvětšování obrazců (tj. při zvětšování obou rozměrů). V případě posloupnosti rovnostranných trojúhelníků nebo kosočtverců (viz obr. 3) je však určování počtů párátek a následné zobecnění náročnější. Počty párátek narůstají nelineárně a vyjádření pravidelnosti v posloupnosti 3, 9, 18, 30, 45, … (pro trojúhelníky) nebo v posloupnosti 5, 16, 33, 56, 85, … (pro kosočtverce) vyžaduje hlubší analýzu a využití určitých souvislostí a dalších matematických poznatků.

Posloupnost 3, 9, 18, 30, 45, … je posloupností trojnásobků trojúhelníkových čísel 1, 3, 6, 10, 15, … Poznatky o trojúhelníkových číslech a jiných figurálních číslech bývají v učebnicích matematiky pro základní školy zařazovány zřídkakdy, přestože mohou být vítaným zpestřením výuky matematiky i podnětem pro žákovská objevování. O figurálních číslech pojednává řada populárně naučných publikací o matematice, např. [1, 2, 3]. Poznatky o čtvercových a trojúhelníkových číslech mohou žáci využít pro zobecnění zmíněné posloupnosti 3, 9, 18, 30, 45, … Označení čtvercových čísel podle jejich grafické reprezentace je žákům zřejmé z různých modelů. Díky souvislostem s dalšími poznatky (obsah čtverce, druhá mocnina) rozpoznají tato čísla snáze než čísla trojúhelníková, i když jejich označení vzniklo obdobně. Poznatek, že každé čtvercové číslo lze rozdělit na dvě po sobě jdoucí čísla trojúhelníková, mohou žáci jednoduše nahlédnout prostřednictvím názorné reprezentace (obr. 4) a dále odvodit vztah pro obecné vyjádření trojúhelníkového čísla (obr. 5). Pomocí obecného zápisu trojúhelníkového čísla $\frac{1}{2}n(n+1)$ je již snadné najít algebraické vyjádření pro počet párátek v rovnostranném trojúhelníku $3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$.

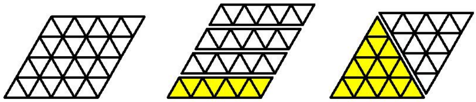


Obr. 4 Vyjádření čtvercového čísla pomocí dvou po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel



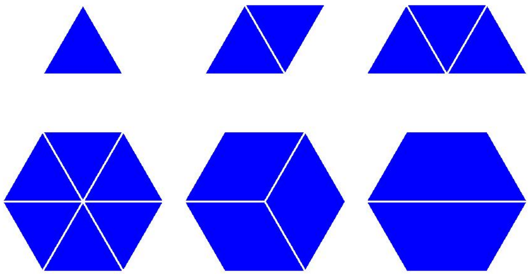
Obr. 5 Odvození vztahu pro obecné vyjádření trojúhelníkového čísla

Z uvedených obecných vyjádření pomocí proměnné n lze určit nejen počet párátek pro libovolně velký obrazce daného tvaru, ale také vyvodit vztahy pro další obrazce. Například z odvozených vztahů lze získat vztah pro zvětšený kosočtverec, a to dvojím způsobem: buď uvažujeme n-násobek kosodélníku s délkou n, nebo složíme kosočtverec ze dvou rovnostranných trojúhelníků (obr. 6).



Obr. 6 Možnosti sestavení kosočtverce z kosodélníků a trojúhelníků

V případě odvození vztahu pro šestiúhelník se nabízejí tři možnosti: šestiúhelník lze sestavit ze šesti rovnostranných trojúhelníků, třech kosočtverců nebo ze dvou rovnoramenných lichoběžníků (obr. 7).

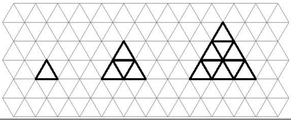
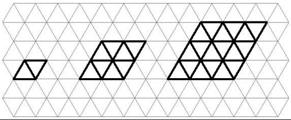
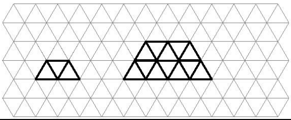
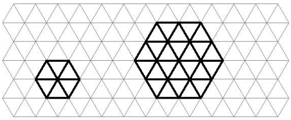


Obr. 7 Možnosti sestavení pravidelného šestiúhelníku z trojúhelníků, kosočtverců a lichoběžníků

V tabulce 1 jsou ukázány možnosti algebraického odvození vztahu pro kosočtverec, rovnoramenný lichoběžník a pravidelný šestiúhelník.

Výše naznačené postupy lze použít nejen pro algebraická vyjádření, ale také pro aritmetické vyjádření s tím, že počet se určuje pro obrazec konkrétní velikosti. Možnost aritmetického odvozování počtu párátek pro pravidelný šestiúhelník bez obecných vztahů s proměnnou n je naznačeno v tabulce 2. Skládání složitějších obrazců z jednodušších je založeno na geometrické představě a dřívější zkušenosti s vytvářením těchto obrazců pomocí trojúhelníkové skládačky (obr. 7). Při odvozování vztahů se tedy žáci opět vracejí ke konkrétním geometrickým obrazcům.

Tabulka 1 Možnosti algebraického odvození vztahů pro další obrazce

	Trojúhelník $T_n = 3A_n = \frac{3}{2}(n^2 + n)$ trojúhelníkové číslo $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$
	Kosočtverec $K_n = n\cdot(4n+1) - n\cdot(n-1) = 3n^2 + 2n$ $K_n = 2T_n - n = 3n^2 + 2n$
	Lichoběžník $L_n = K_n + T_n - n = \frac{1}{2}(9n^2 + 5n)$
	Šestiúhelník $S_n = 6T_n - 6n = 3K_n - 3n =$ $= 2L_n - 2n = 9n^2 + 3n$

Tabulka 2 Možnosti aritmetického odvození počtu párátek pro další obrazce

Délka strany	1	2	3	4
Trojúhelníkové číslo	1	3	6	10
Trojúhelník	$3\cdot 1 = 3$	$3\cdot 3 = 9$	$3\cdot 6 = 18$	$3\cdot 10 = 30$
Kosočtverec	$2\cdot 3 - 1 = 5$	$2\cdot 9 - 2 = 16$	$2\cdot 18 - 3 = 33$	$2\cdot 30 - 4 = 56$
Lichoběžník	$3\cdot 3 - 2\cdot 1 = 7$	$3\cdot 9 - 2\cdot 2 = 23$	$3\cdot 18 - 2\cdot 3 = 48$	$3\cdot 30 - 2\cdot 4 = 82$
Šestiúhelník ze 6 trojúhelníků	$6\cdot 3 - 6\cdot 1 = 12$	$6\cdot 9 - 6\cdot 2 = 42$	$6\cdot 18 - 6\cdot 3 = 90$	$6\cdot 30 - 6\cdot 4 = 156$
Šestiúhelník ze 3 kosočtverců	$3\cdot 5 - 3\cdot 1 = 12$	$3\cdot 16 - 3\cdot 2 = 42$	$3\cdot 33 - 3\cdot 3 = 90$	$3\cdot 56 - 3\cdot 4 = 156$
Šestiúhelník ze 2 lichoběžníků	$2\cdot 7 - 2\cdot 1 = 12$	$2\cdot 23 - 2\cdot 2 = 42$	$2\cdot 48 - 2\cdot 3 = 90$	$2\cdot 82 - 2\cdot 4 = 156$

Z algebry zpět do geometrie

Nalezené zobecnění v aritmetické či algebraické podobě lze využít nejen k odvození jiných vztahů, jak bylo ukázáno výše, ale také ke snazšímu nalezení konkrétních hodnot nebo k řešení úloh, které vyžaduje užití určitého zobecnění (například užití vztahu s proměnnou pro sestavení rovnice nebo nerovnice). Uveďme dva příklady úloh, které lze snadno řešit využitím zobecněných vztahů pro obrazce v trojúhelníkové síti:

Které obrazce a jak velké lze sestavit ze 100 párátek?

Pokud se žákům podařilo provést zobecnění v algebraické podobě, mohou objevené vztahy použít pro sestavení rovnice, případně nerovnice (uvažujeme-li formulaci „nejvýše ze 100 párátek“) a pomocí ní úlohu řešit. Z podoby výrazu na levé straně rovnice (příp. nerovnice) lze vyvodit, zda řešení vůbec existuje. V případě, že žáci mají k dispozici jen aritmetické vyjádření, pracují s konkrétními hodnotami (tab. 2). Žáci se nemusí omezovat jen na výběr obrazců, jimiž se předtím zabývali, ale mohou navrhovat i další možnosti úpravou známých obrazců (například doplněním párátek).

Které geometrické obrazce lze vytvořit z lichého (sudého) počtu párátek?

Při řešení této úlohy můžeme také využít rovnici. Na základě koeficientů v rovnici lze rozhodnout, zda popsaná závislost splňuje danou podmínku lichosti (sudosti). Pro mnohé žáky však bude jednodušší pracovat s konkrétními počty (tab. 2.).

Závěr

Při řešení výše popsané úlohy s obrazci z párátek žáci přirozeně uplatňují některé postupy charakteristické pro bádání. Patří mezi ně modelování, pozorování, navrhování postupů, usuzování, vyvozování, zobecňování a ověřování. Vytváření názorných modelů zkoumaných útvarů a jejich pozorování umožňuje žákům uchopit neznámou situaci, získat informace pro její popis a snáze porozumět podstatě problému. Pomocí konkrétních modelů žáci snadno určí počet prvků zkoumaných objektů a nahlédnou vzájemné vztahy. Výsledkem práce s konkrétními modely je nalezení aritmetického modelu pro popis sledované pravidelnosti a jeho případné zobecnění, tj. vyvození algebraického vyjádření tohoto modelu. Správnost algebraického vyjádření žáci většinou ověřují dosazením a porovnáním se známou hodnotou. V průběhu řešení je vhodné, aby žáci své návrhy diskutovali, kladli otázky, zdůvodňovali svá tvrzení a formulovali závěry. V některých situacích, kdy se žáci v situaci ztrácejí, nenacházejí cestu k jádru problému a v důsledku toho klesá jejich zájem o řešení problému, se doporučuje, aby učitel podněcoval žáky k diskusi kladením návodných otázek, shrnutím žákovských tvrzení, výzvou k jejich ověření.

Výše popsané úlohy představují pouze některé z mnoha možností, jak v rámci učiva matematiky základní školy objevovat souvislosti mezi poznatky z geometrie, aritmetiky a algebry. Lze najít další modifikace těchto úloh, zkoumat jinou specifickou skupinu útvarů nebo jiné charakteristiky těchto útvarů, řešit situace s jinými vstupnými podmínkami. V případě obrazců z párátek sestrojených v trojúhelníkové síti mohou žáci dále objevovat souvislosti mezi obvodem a obsahem. Obvod obrazců, které prodlužujeme nebo zvětšujeme v obou rozměrech, se mění lineárně, u podobných obrazců se jedná o přímou úměrnost. Obsah (vyjádřený počtem rovnostranných trojúhelníků) obrazců, které prodlužujeme, se mění lineárně, zatímco obsah podobných obrazců nelineárně.

Přestože zobecnění zkoumaných pravidelností bude u mladších žáků nejčastěji vyjádřeno aritmetickými prostředky, protože zápis s proměnnou bude pro ně zatím příliš abstraktní, je důležité tato zobecnění při řešení takových úloh provádět a připravovat je tak na pozdější poznávání závislostí a jejich algebraizaci. Je možné, že mezi žáky se objeví jedinci, kteří porozumí algebraickému zápisu dříve a budou schopni takový zápis bez problémů používat. Učitel by se neměl nechat odradit od zařazování aktivit, jejichž výstupem je určité zobecnění, jen proto, že žáci nezvládnou zapsat zobecnění algebraicky. Existují různé cesty, jak zobecnění hledat a formulovat, ale podstata je stejná. Je třeba charakterizovat společné vlastnosti objektů, pojmenovat invarianty (tj. vlastnosti, které jsou pro sledované objekty neměnné), zjistit, co a jak je závislé na změnách.

Literatura

[1] *Ball, J.*: Mysli si číslo. Slovart, Praha, 2006.

[2] *Crilly, T.*: Matematika – 50 myšlenek, které musíte znát. Slovart, Praha, 2010.

[3] *Chajda, R.*: Hravá matematika – hříčky s plochami i křivkami, úhly, čísly a šiframi. Albatros Media, Praha, 2012.

[4] *Samková, L. a kol.*: Badatelsky orientované vyučování matematice. Scientia in Educatione, roč. 6 (2015), č. 1.

Poděkování.
Článek vznikl s podporou grantu GAČR 14-01417S a RVO 67985840.