MATEMATIKA

Pětiúhelník získaný skládáním papíru

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V rámci planimetrie se žáci na základní škole učí sestrojit některé pravidelné n-úhelníky. Zcela jistě by měli umět eukleidovsky sestrojit rovnostranný trojúhelník, čtverec či (kružnici vepsaný) pravidelný šestiúhelník a pravidelný osmiúhelník. Později se rovněž seznámí (většinou bez odůvodnění) s konstrukcí pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku. V článku ukážeme, jak získat pětiúhelník pouze pomocí skládání čtvercového archu papíru a následného jediného střihu nůžkami. Rozložené origami na první pohled vypadá jako pětiúhelník pravidelný. Je tomu však skutečně tak? Na otázku odpovíme pomocí výpočtů z oblasti středoškolské analytické geometrie. Nejprve však zakreslíme postupně vzniklé ohyby na papíře. Při tomto úkolu procvičíme svou prostorovou představivost.

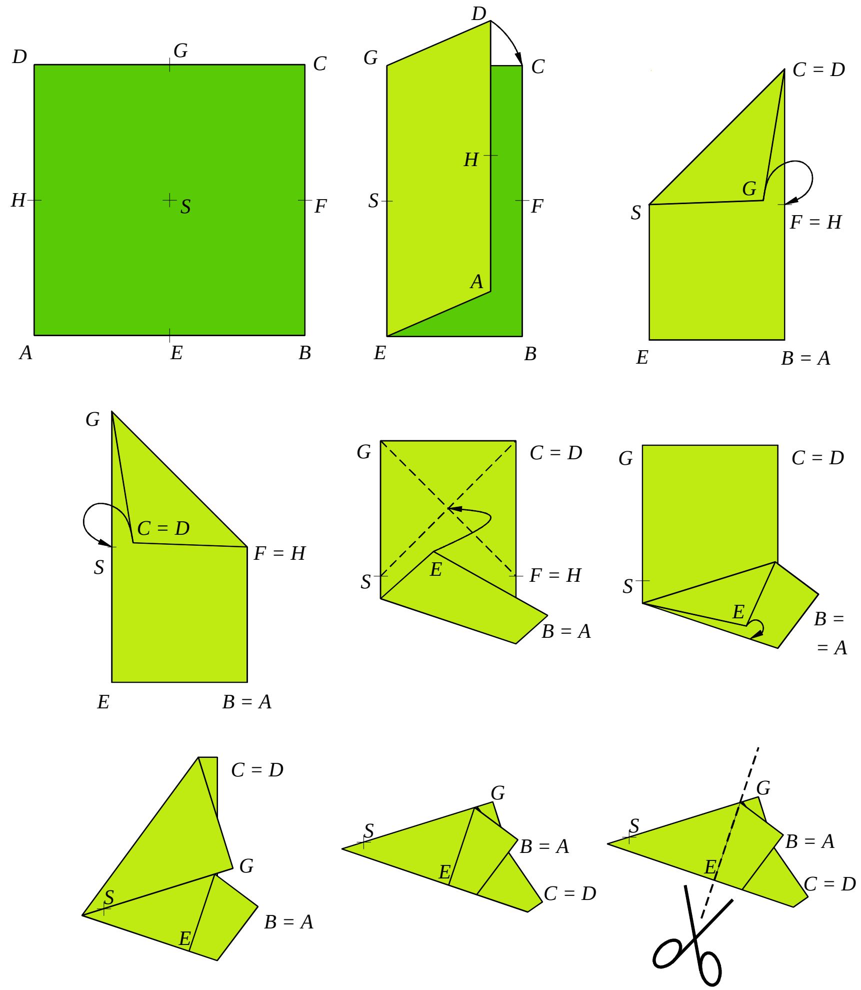
V článku jsou představeny dva algoritmy získání pětiúhelníku. Jsou založeny na postupech zveřejněných ve videích [3] a [4], která jsou volně dostupná na internetu.

Pracovat budeme s archem papíru tvaru čtverce. Budeme přitom předpokládat, že je papír „ideálně tenký“, tj. že skládanky mají i po provedení všech kroků algoritmů nulovou výšku, že na ohyby není nutné počítat s malou částí papíru navíc apod.

Střed čtverce označme S, jeho vrcholy A, B, C, D a středy jeho stran E, F, G, H. Pro zjednodušení vyjadřování nebudeme vždy zcela exaktně rozlišovat konečné útvary od nekonečných (budeme tedy např. mluvit o *ose jisté úsečky* namísto o *úsečce, která leží na ose jisté úsečky*, o *úhlu* namísto *průniku úhlu a oblasti papíru* atd.).

První skládanka

Popišme první postup (viz [3]) pro získání pětiúhelníku. Sedm kroků algoritmu je znázorněno na obr. 1, který je zřejmě srozumitelnějším návodem než následující stručný, místy ne zcela exaktní slovní popis.



Obr. 1

1 Čtverec přehneme tak, aby jeho strana AD splynula se stranou BC.

2 Bod G ztotožníme s bodem $F = H$ (tj. úsečka GC splyne s úsečkou FC a úsečka GS splyne s úsečkou FS), zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 2.

3 Bod $C = D$ ztotožníme s bodem S (tj. úsečka CG splyne s úsečkou SG a úsečka CF splyne s úsečkou SF), zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 3.

4 Bod E ztotožníme s průsečíkem ohybů z kroků 2 a 3.

5 Bod E dále „navrátíme částečně zpět" tak, aby část původní úsečky EG splynula s částí ohybu z kroku 4.

6 Zbývající část původní úsečky EG ztotožníme s ohybem z kroku 5.

7 Podél tohoto ohybu dále skládanku přehneme „přibližně v polovině" (vrchní část skládanky složíme pod spodní část).

$\oplus$ Skládanku přestřihneme podél okraje papíru procházejícího bodem E na dva díly a výsledný útvar nalezneme v části obsahující střed S výchozího čtverce.

Není nutné prozrazovat těm, kteří origami skládají, co má být výsledkem. Před rozbalením ustřižené části je lze nechat hádat, jaký útvar získali.[1]

Pokusme se nyní pomocí středoškolských znalostí dokázat, zda pětiúhelník je, či není pravidelný.[2] Pokud bychom úlohu zadali ve výuce (např. v semináři před maturitou), bylo by jistě zajímavé pozorovat, kterou oblast matematiky jednotliví studenti zvolí. Možná by se někdo snažil dopídit výsledku pomocí různých známých vět a vztahů (Pythagorova věta, Eukleidovy věty o výšce a odvěsně, goniometrické identity apod.), jiný by „vsadil" na komplexní čísla. Za nejvhodnější považujeme prostředky analytické geometrie. Při jejich využití existují způsoby výpočtů (např. níže uvedené), které vedou k cíli velmi rychle.

Také je vhodné zamyslet se nad základní taktikou dokazování: nejvhodnější bude prověřit shodnost jistých úhlů. Pravidelný pětiúhelník je složen z pěti rovnoramenných trojúhelníků, které mají při hlavním vrcholu úhel o velikosti 72°. Úhel téže velikosti svírají rovněž výšky zmíněných trojúhelníků vedené společným hlavním vrcholem. Pokud by útvar nebyl

---

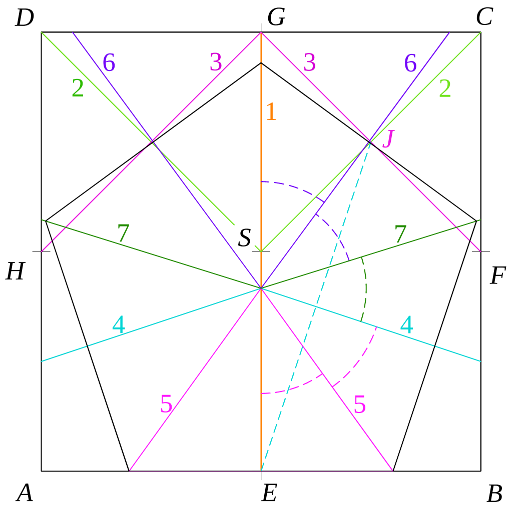
[1] Při mém „pokusu" s dospělými lidmi byly prvními dvěma tipy *„hvězdice"* a *„osmiúhelník"*.

[2] Pětiúhelník je zcela jistě osově souměrný podle osy EG.

pravidelným pětiúhelníkem, stačilo by tedy k důkazu této vlastnosti nalézt alespoň jeden z uvedených deseti úhlů, jehož velikost není 72°.

Ať tak či onak, stěžejním prvním krokem bude do výchozího čtverce narýsovat úsečky odpovídající ohybům vzniklým v jednotlivých krocích pracovního postupu. Tento úkol bude nejjednodušší, pokud skládanku skutečně vyrobíme a při zakreslování úseček budeme jak pozorovat obr. 1, tak rozložený pětiúhelník. Kdo si chce úlohu ztížit, nebude rozprostřenou skládanku využívat.

Výsledek je uveden na obr. 2. Jednotlivé ohyby (úsečky) jsou značeny plnou čarou a jsou k nim připojena čísla značící příslušné kroky. Čárkovaně jsou značeny pomocné geometrické útvary.



Obr. 2

Připojme k zakresleným úsečkám raději výslovně několik poznámek:[3] je-li J průsečík úseček 2 a 3, leží úsečka 4 na ose úsečky EJ; úsečka 6 neprochází bodem J; úsečka 6 leží na ose úhlu s rameny 1 a 7, je proto nutné nejprve znázornit úsečku 7 a teprve poté úsečku 6; vrchol pětiúhelníku na úsečce 7 neleží na straně původního čtverce (odstřižená část by tedy neměla být rozstřižena na více dílů).

[3]Vzhledem k osové souměrnosti pětiúhelníku budeme veškeré popisy, tvrzení apod. vztahovat pouze k jediné (a to pravé) polovině čtverce.

Po zkoušce naší prostorové představivosti procvičme znalosti analytické geometrie. Čtverec umístíme do vhodného kartézského souřadnicového systému tak, aby bod S měl souřadnice $[0; 0]$ a aby bod E měl souřadnice $[0; -1]$.[4] Průsečík J úseček 2 a 3 má poté souřadnice $[0{,}5; 0{,}5]$ a směrový vektor s_{EJ} přímky EJ je (až na nenulový násobek)

$$s_{EJ} = (0{,}5; 1{,}5).$$

Směrový vektor s_4 osy úsečky EJ, tj. směrový vektor přímky 4, je tedy (až na nenulový násobek)

$$s_4 = (1{,}5; -0{,}5).$$

Vypočítejme nyní odchylku α přímek 1 a 4, tj. velikost úhlu vektorů s_1 a s_4, kde $s_1 = (0; -1)$ je směrovým vektorem přímky 1:

$$\cos\alpha = \frac{|s_1 \cdot s_4|}{\|s_1\| \cdot \|s_4\|} = \frac{|(0; -1) \cdot (1{,}5; -0{,}5)|}{\|(0; -1)\| \cdot \|(1{,}5; -0{,}5)\|} = \frac{0{,}5}{\sqrt{2{,}5}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

a proto

$$\alpha \doteq 71°34'.$$

Z postupu při tvorbě origami plyne, že přímky 1 a 4 jsou výškami dvou z pěti rovnoramenných trojúhelníků, z nichž je složen vystřižený útvar. Tento pětiúhelník proto není pravidelný.

Odchylky přímek 1 a 5, 5 a 4, 4 a 7 jsou shodné, menší ($\doteq 35°47'$) než „požadovaných" 36°. Shodné odchylky přímek 7 a 6, 6 a 1 jsou tedy naopak mírně větší než 36°.[5]

Druhá skládanka

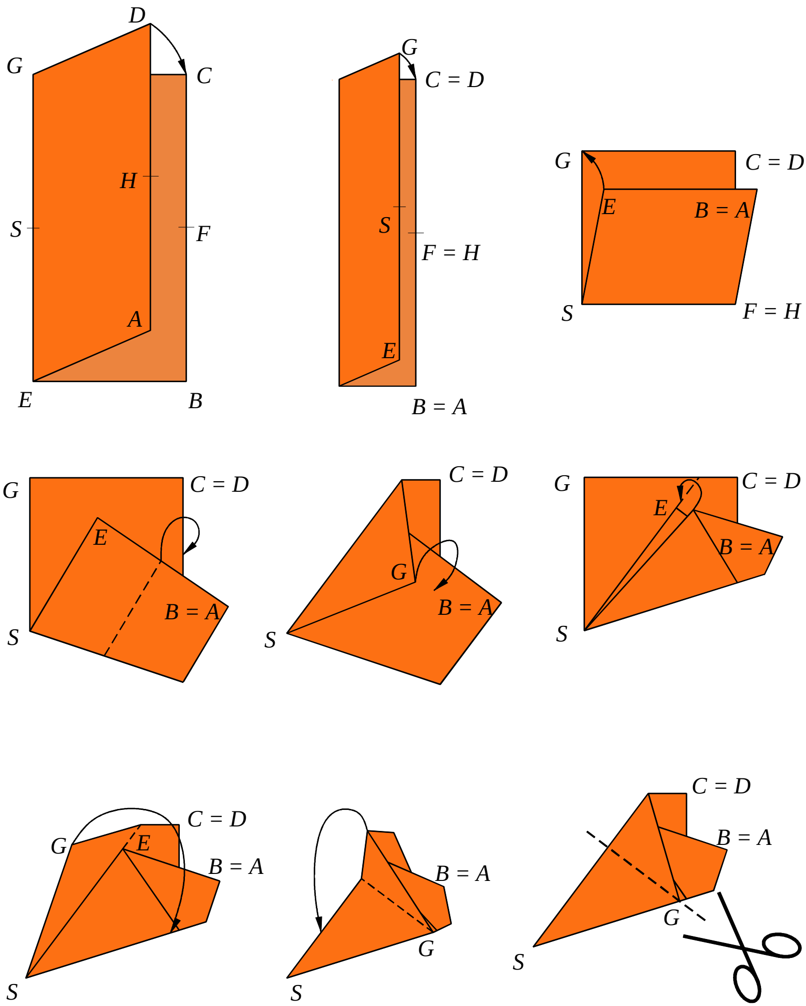
Druhý postup (viz [4]) při vytváření pětiúhelníku lze rozdělit do následujících osmi kroků.[6] Níže popsaný proces opět doporučujeme sledovat současně na jeho grafickém ztvárnění (obr. 3).

---

[4] Přímka FH, resp. EG tedy splývá s osou x, resp. y souřadnicového systému.

[5] Při kroku 7 proto nedochází k přesnému překrytí dvou úhlů, čehož si však při skládání reálného papíru (a v důsledku omezeného lidského vnímání při sledování obr. 1 či videa [3]) zřejmě nevšimneme.

[6] V článku je algoritmus oproti videu [4] (kvůli snazšímu popisu bez využití kamery) nepodstatně modifikován.



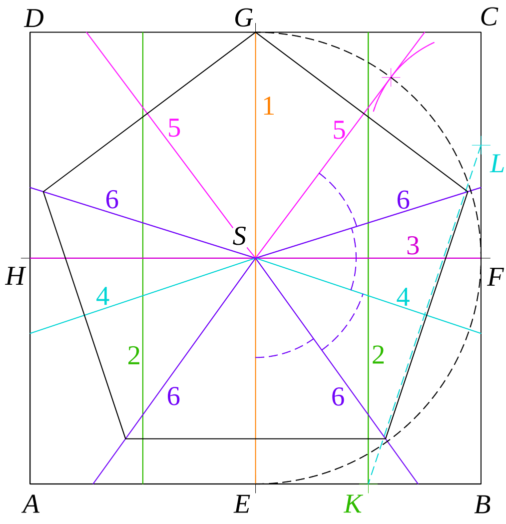
Obr. 3

1 Čtverec přehneme tak, aby jeho strana AD splynula se stranou BC.
2 Dále s touto stranou dočasně ztotožníme i úsečku EG, zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 2.
3 Obdélník $EBCG$ přeložíme tak, aby úsečka EB byla totožná s úsečkou GC, zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 3.

4 Papír dále složíme tak, aby průsečík ohybu z kroku 2 a úsečky EB byl na úsečce FC a vytvořený ohyb procházel bodem S.
5 Nyní podél úsečky SE přehneme část papíru obsahující bod G, zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 5.
6 Ohyb (přesněji řečeno část ohybu) z kroku 4 ztotožníme s úsečkou SE.
7 Dále v podstatě zopakujeme krok 5,[7] ale po složení papíru ho již nenavracíme zpět.
8 Zřejmým přeložením skládanky si vytvoříme ohyb, který prochází bodem G a je kolmý (mimo jiné) na „přikrytou“ úsečku SE. Poté se navrátíme do stavu před krokem 8.

⊕ Dle přehybu z kroku 8 skládanku přestřihneme na dvě části. Výsledný pětiúhelník je opět v segmentu obsahujícím bod S.

Zakresleme nejprve do čtverce úsečky reprezentující jednotlivé ohyby. Řešení je na obr. 4.



Obr. 4

K potvrzení či vyvrácení pravidelnosti pětiúhelníku využijeme opět analytickou geometrii. Výchozí čtverec umístíme jako u předchozího origami,

[7] Krok 5 bychom mohli vynechat. Podržíme se však odkazovaného videa, jehož je tento krok součástí. Reálný papír se skutečně lépe a „přesněji“ přehýbá přes menší počet vrstev archu.

tj. $S\,[0;0]$, $E\,[0;-1]$. Z postupu při vytváření skládanky je zřejmé, že čtyři úhly značené na obr. 4 čárkovaně jsou shodné. Stačí tedy vypočítat velikost jakéhokoliv z nich, nebo velikost pátého úhlu, s nímž čtyři předchozí tvoří úhel přímý.

Bod, jenž je průsečíkem ohybu z kroku 2 a úsečky EB, označme K a bod na úsečce FC, se kterým je bod K ztotožněn v kroku 4, označme L. Bod K má souřadnice $[0{,}5;-1]$, a tedy bod L má souřadnice $[1;0{,}5]$.

Přímka 5 (obr. 4) je tečnou z bodu S ke kružnici se středem L a poloměrem 0,5. Rovnice uvedené kružnice je

$$(x-1)^2+(y-0,5)^2=0,5^2,$$

parametrická rovnice přímky 5 je[8]

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tečna má s kružnicí jediný společný bod, proto musí mít kvadratická rovnice

$$(at-1)^2+(t-0{,}5)^2=0{,}5^2$$

jediné řešení (dvojnásobný kořen). Diskriminant D této rovnice s neznámou t musí být tedy roven 0.

Rovnici dále upravíme na ekvivalentní tvar

$$t^2(a^2+1)-t(2a+1)+1=0,$$

z čehož plyne

$$D=(2a+1)^2-4(a^2+1)=0$$

a následně

$$a=0{,}75.$$

Směrový vektor s_5 přímky 5 je tudíž $s_5=(0{,}75;1)$.

Vypočítejme odchylku β přímek 1 a 5, neboli velikost úhlu vektorů s_1 a s_5, kde $s_1=(0;1)$ je směrovým vektorem přímky 1:

$$\cos\beta=\frac{|s_1\cdot s_5|}{\|s_1\|\cdot\|s_5\|}=\frac{|(0;1)\cdot(0{,}75;1)|}{\|(0;1)\|\cdot\|(0{,}75;1)\|}=\frac{1}{1{,}25}=0{,}8,$$

[8]Přímka 5 má směrový vektor $(a,1)$, kde hodnotu a musíme určit. Volbou čísla 1 ve druhé složce vektoru zároveň vylučujeme druhou tečnu uvedených vlastností, tj. osu x.

a tedy $\beta \doteq 36°52'$. Protože je papír stříhán kolmo na přímku 5 a současně $\beta \neq 36°$, není pětiúhelník pravidelný.

Čtyři shodné, čárkovaně vyznačené úhly jsou tedy menší než $36°$.[9]

Připojme opět několik zřejmých poznámek: ostroúhlý trojúhelník, jehož dvě strany leží na úsečkách 1 a 6 a třetí strana je kolmá na úsečku 5, není rovnoramenný; vzdálenost vrcholu G od středu S je sice 1, ale čtyři ostatní vrcholy jsou ke středu blíže, jak je vidět z půlkružnice narýsované na obr. 4 čárkovanou čarou; odstřižená část zůstane opět vcelku.

Dále podotkněme, že pětiúhelníky vytvořené v první a v druhé skládance nejsou totožné. Z pohledu na obr. 2 a obr. 4 je také zřejmé, že jsou jinak umístěny vzhledem k okrajům výchozího archu papíru: strana prvního, resp. druhého pětiúhelníku, leží, resp. neleží, na straně čtverce.

Třetí skládanka

Nakonec přiložme odkaz [5] na video, na němž lze sledovat třetí algoritmus pro vytvoření pětiúhelníku z papíru tvaru čtverce. Zakreslení jednotlivých ohybů do čtverce necháváme na čtenáři. Bude to jediný úkol, u kterého předpokládáme zamyšlení, neboť zjištění, zda alespoň tentokrát dostaneme pětiúhelník pravidelný, je v tomto případě triviální.

Čtenář si rovněž může zkusit nakreslit obrázek znázorňující stavy papíru po jednotlivých krocích algoritmu, tj. analogii obr. 1 či obr. 3. Také zde si prověří svou prostorovou představivost (zvláště pokud se „zřekne“ pohledu na reálnou skládanku) a při přesném rýsování současně procvičí sestrojování obrazů mnohoúhelníků v osové afinitě v rovině (tj. učivo probírané v úvodních hodinách deskriptivní geometrie).

Rovněž ve třetím případě je pětiúhelník ve čtverci umístěn v poloze odlišné od předcházejících. Postup jeho vzniku totiž začíná přehybem papíru nikoli podél úsečky EG, ale podél úsečky AC. Pětiúhelník je tedy osově souměrný dle úhlopříčky původního čtverce.

Závěr

Co říci závěrem? Snad popřát nejen hodně zdaru při znázorňování jednotlivých ohybů a při výpočtech, ale i příjemnou zábavu při tvorbě skládanek, pro kterou lze nadchnout i nejmenší členy rodiny.

Návody na půvabná, často trojrozměrná origami lze najít nejen na internetu, ale i v řadě tištěných publikací prodávaných v běžné síti knih-

[9] Úsečka SG proto po kroku 7 přesně nelícuje s úsečkou 6.

kupectví. Existují rovněž tituly monotematicky koncipované (skládání zvířat, šperků atd.) či určené speciálně pro malé děti. Na straně druhé lze čerpat informace z odborných monografií věnovaných studiu origami po matematické stránce. Z obsáhlých publikací, které se zabývají touto problematikou, jmenujme monografii *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra* [1], kterou napsali Erik Demaine a Joseph O'Rourke, či knihu *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art* [2] od Roberta J. Langa.

Literatura

[1] Demaine, E. D., O'Rourke, J.: *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2007.

[2] Lang, R. J.: *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, 2. vydání, A K Peters/CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2011.

[3] https://www.youtube.com/watch?v=4kJmJUQVbO0

[4] https://www.youtube.com/watch?v=7pkqGZ5f0es

[5] https://www.youtube.com/watch?v=B_JGnazbB1k

Hra Abaku

OLGA KAČENKOVÁ

Základní škola Tuchlovice

Abaku je hra pro 1 až 4, nejčastěji ale 2 hráče, která procvičí výborně základní počtářské dovednosti a schopnost kombinovat. Hrát se dá online, existuje i v deskovém provedení. Její princip je podobný jako u písmenkové hry scrabble. Na herním plánu skládáte z pěti čísel příklad tak, aby vodorovně nebo svisle navazoval na nějaký už vytvořený. Jeden příklad obsahuje vždy jednu početní operaci: sčítání, odčítání, násobení, dělení, druhé a třetí mocniny a druhé a třetí odmocniny přirozených čísel. Tyto početní operace, stejně jako rovnítko si na správných místech pouze „myslíte", ve hře jsou jen číselné kameny s čísly 0–9. Např. ložená pětice 35237 tak představuje příklad $35 + 2 = 37$. Hráči získávají body podle číselné hodnoty