Šikmý vrh z rozhledny

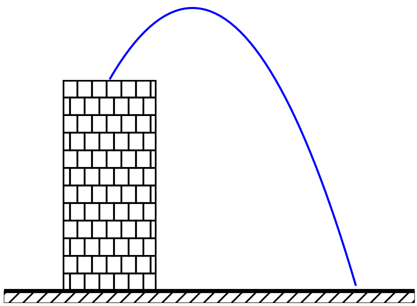
ONDŘEJ MOC – PETR EISENMANN

Fakulta sociálně ekonomická UJEP, Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Úvod

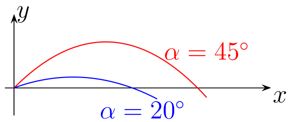
Příběh začíná v jedno letní dopoledne při výletu Klubu přátel diferenciální geometrie po krásách severních Čech. Členové klubu Petr a Ondra, věrni své zálibě v matematice a fyzice, po cestě změřili hloubku studně na hradě Helfenburk pomocí padajícího kamínku a stopek. Při návštěvě rozhledny u Náčkovic se řeč stočila na další téma – šikmý vrh.

Oběma kamarádům bylo známo, že pokud se hladina vrhu a dopadu tělesa nachází ve stejné výšce, potom v prostředí bez odporu je optimální elevační úhel, při kterém vržené těleso dopadne do maximální možné vzdálenosti, roven 45°. Vznikla ovšem otázka, jak je to s tímto optimálním elevačním úhlem v situaci, kdy vržené těleso dopadá níže, než je výška vrhu, tedy např. při vrhu z rozhledny (obr. 1).



Obr. 1 Šikmý vrh z rozhledny

Petr tvrdil, že bez ohledu na to, z jaké výšky těleso vrháme, je elevační úhel, při kterém nastane maximální možná vzdálenost dopadu, stále roven 45°. Podle něj se tato situace od šikmého vrhu v rovině nijak neliší. Zdůvodňoval to tím, že kdybychom proložili bodem vrhu na rozhledně rovinu rovnoběžnou se zemí, bude trajektorie vrhu protínat tuto rovinu v bodě, který je v případě elevačního úhlu různého od 45° vzdálen od místa vrhu méně, než je tomu v případě vrhu pod elevačním úhlem 45° (obr. 2).



Obr. 2 Trajektorie hmotného bodu vrhnutého šikmo při různých elevačních úhlech

Ondra zastával názor, že výhodnější je vrhnout těleso pod menším elevačním úhlem než je 45°, neboť vrhnuté těleso se v prostředí bez odporu pohybuje po parabole, a pokud vrhneme těleso při elevačním úhlu menším než je 45°, potom se při svém letu vrátí do stejné výšky, jako ze které bylo vystřeleno, pod mírnějším úhlem, a od tohoto místa pak nepadá dolů tak rychle, jako kdyby do tohoto místa přiletělo pod úhlem 45°. Kdo z obou přátel má pravdu?

Řešení problému

Předpokládejme, že hmotný bod byl vystřelen v prostředí bez odporu a nyní koná šikmý vrh, přičemž vektor jeho počáteční rychlosti o velikosti v_0 svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Oproti klasicky pojatým úlohám hmotný bod nedopadá na zem ve stejné výšce, ze které byl vystřelen, ale dopadá níže, což může být způsobeno např. výstřelem z okna rozhledny a následným dopadem na zem pod rozhlednou. Výškový rozdíl mezi místem výstřelu a místem dopadu označme symbolem h. Otázka zní: „Pod jakým elevačním úhlem je nutné hmotný bod vystřelit, aby byl jeho dolet maximální možný?“

Vektor počáteční rychlosti rozložíme do složek os x a y, kde

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha,$$
$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha.$$

Nyní, když známe počáteční rychlosti ve směru jednotlivých os, můžeme vyjádřit okamžité rychlosti ve směru obou os a souřadnice hmotného bodu v čase t. Počáteční bod pohybu umístíme do počátku souřadných os. Potom ve směru osy x hmotný bod koná rovnoměrný přímočarý pohyb a platí:

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha, \\
x &= v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Ve směru osy y se jedná o rovnoměrně zpomalený a následně rovnoměrně zrychlený pohyb, kde platí

$$
\begin{aligned}
v_y &= v_{0y} - gt = v_0 \cdot \sin\alpha - gt, \\
y &= v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.
\end{aligned}
$$

K vyjádření celkově uražené dráhy potřebujeme znát celkovou dobu pohybu, označme tuto veličinu symbolem T. Tato veličina se skládá z doby, kdy těleso stoupalo vzhůru (označme ji symbolem t_n (index n značí *nahoru*)) a doby, kdy klesalo dolů (označme tento čas symbolem t_d (index d znamená *dolů*)). Je tedy $T = t_n + t_d$.

Chceme-li vyjádřit t_n, stačí si uvědomit, že v okamžiku, kdy pohyb vzhůru ustane, je okamžitá svislá rychlost v_y rovna nule, platí tedy

$$
v_y = v_{0y} - gt_n = v_0 \cdot \sin\alpha - gt_n = 0,
$$

z čehož úpravou poslední rovnosti dostaneme

$$
t_n = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}. \tag{2}
$$

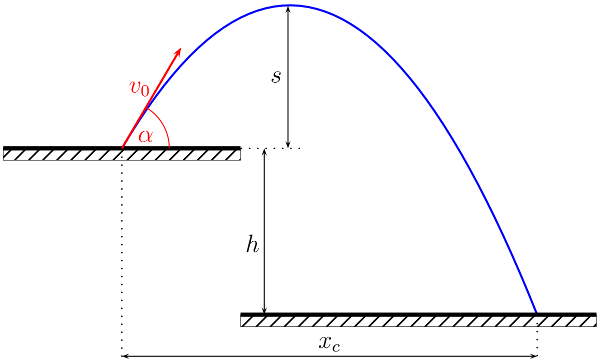
Označme symbolem s výšku, do které hmotný bod vystoupá při pohybu vzhůru za dobu t_n (obr. 3).

S použitím vzorce (2) platí

$$
s = \frac{1}{2}g(t_n)^2 = \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}.
$$

Při návratu z výšky s proletí hmotný bod rovinou počátku pohybu a pokračuje směrem dolů do hloubky h. Na zem tedy dopadne z výšky $H = s + h$. Platí

$$
H = s + h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} + h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha + 2gh}{2g} = \frac{1}{2}g(t_d)^2. \tag{3}
$$



Obr. 3 Trajektorie hmotného bodu při dopadu do hloubky h

Z poslední rovnosti ve vztahu (3) vyjádříme hodnotu t_d

$$t_d = \frac{\sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \tag{4}$$

Víme, že pro celkovou dobu pohybu platí $T = t_n + t_d$, čímž z rovností (2) a (4) dostáváme

$$T = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \tag{5}$$

Nyní se zaměříme na délku vrhu, tedy na vzdálenost místa dopadu od kolmice spuštěné místem výstřelu k vodorovné rovině. Vzhledem k tomu, že se jedná o celkovou vzdálenost uraženou ve směru osy x, označíme ji symbolem x_c (obr. 3). Při výpočtu hodnoty x_c vyjdeme ze vztahů (1) a (5). Je

$$x_c = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot T = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \tag{6}$$

Ze vztahu (6) je zřejmé, že vzdálenost dopadu x_c závisí na třech veličinách – hloubce h, počáteční rychlosti v_0 a elevačním úhlu α. Vzhledem k fyzikální podstatě sledovaného jevu lze předpokládat, že s rostoucí hodnotou h, resp. v_0 se bude zvyšovat i vzdálenost dopadu. Svou pozornost proto zaměříme pouze na závislost x_c na počátečním elevačním úhlu α a určíme, při jaké hodnotě α bude x_c maximální, tj. nalezneme lokální maximum funkce $x_c(\alpha)$. Vzhledem k tomu, že výraz ve vzorci (6) budeme derivovat vzhledem k proměnné α, upravíme jej do tvaru vhodnějšího pro derivování:

$$x_c = \frac{v_0}{2g} \cdot \left(v_0 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha} \right) \tag{7}$$

Funkci (7) zderivujeme podle α. Tím dostaneme

$$x_c' = \frac{v_0}{2g} \cdot \left(v_0 \cdot 2 \cos 2\alpha + \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 + 8gh \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{2 \cdot \sqrt{v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha}} \right).$$

Tuto derivaci položíme rovnu nule, čímž po následných úpravách dostaneme rovnost

$$2v_0 \cos 2\alpha = \frac{4gh \sin 2\alpha - v_0^2 \cdot \sin 4\alpha}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha}}. \tag{8}$$

Dalšími úpravami budeme směřovat k vyjádření optimálního elevačního úhlu α z rovnosti (8). Vynásobením obou stran rovnice (8) odmocninou ve jmenovateli zlomku a následným umocněním obou stran rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 4v_0^2 \cos^2 2\alpha \cdot &\left(v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha \right) = \\ &= 16g^2h^2 \sin^2 2\alpha - 8gh \sin 2\alpha v_0^2 \sin 4\alpha + v_0^4 \sin^2 4\alpha. \end{aligned}$$

S využitím rovnosti $4 \sin^2(2\alpha) \cdot \cos^2(2\alpha) = \sin^2(4\alpha)$ převedeme předchozí vztah do tvaru

$$\begin{aligned} v_0^4 \sin^2 4\alpha + &32v_0^2 gh \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= v_0^4 \sin^2 4\alpha + 16g^2h^2 \sin^2 2\alpha - 8v_0^2 gh \sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Odečtením výrazu $v_0^4 \cdot \sin^2(4\alpha)$ a následným vydělením obou stran rovnice výrazem $8gh$ dostaneme

$$4v_0^2 \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha = 2gh \sin^2 2\alpha.$$

Nyní na levé straně rovnice vytkneme člen v_0^2 a dále použijeme vzorce pro dvojnásobný argument funkcí sinus a kosinus.

$$v_0^2 \cdot \left(4\cos^2 2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha\right) = \\ = 2gh\,(2\sin\alpha \cdot \cos\alpha)^2$$

Obě strany rovnice vydělíme výrazem $4\cos^2\alpha$. Tím se zbavujeme jednoho kořenu rovnice, a to $\alpha = 90°$. Při výstřelu pod elevačním úhlem $\alpha = 90°$ je z fyzikální podstaty jevu $x_c = 0$. Toto řešení přináší minimum funkce, a proto nás tento případ nebude dál zajímat.

$$v_0^2 \cdot \left(\cos^2 2\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos 2\alpha\right) = 2gh \cdot \sin^2\alpha$$

Na levé straně rovnice vytkneme výraz $\cos 2\alpha$. Následnou úpravou se elegantně zbavíme zbývajících goniometrických funkcí na levé straně rovnice:

$$v_0^2 \cdot \cos 2\alpha = 2gh \cdot \sin^2\alpha$$

Pomocí rovností $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ dostaneme

$$\sin^2\alpha = \frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2gh}. \tag{9}$$

Předpokládáme $0 \leq \alpha \leq 90°$, tedy $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$. Vyjádřením proměnné α z rovnosti (9) získáme

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}}\right). \tag{10}$$

Nyní by bylo matematicky korektní ověřit, že pro uvedený úhel se opravdu jedná o maximum funkce x_c, např. pro uvedený úhel vypočítat hodnotu druhé derivace funkce (7). Odkážeme se na fyzikální intuici, která říká, že se skutečně jedná o maximum. Ze vzorce (10) je zřejmé, že optimální elevační úhel, při kterém těleso doletí nejdále, je funkcí dvou proměnných v_0 a h. Tím se ukázalo, že pro různé hloubky h optimální elevační úhel α nabývá různé hodnoty. Ovšem nelze říci, že při konkrétní hloubce h je optimální elevační úhel α roven konkrétní hodnotě, neboť je dále ovlivněn hodnotou počáteční rychlosti v_0. Při dané hodnotě h tedy dvěma různým počátečním rychlostem budou příslušet i dvě různé hodnoty optimálních elevačních úhlů.

Diskuse nalezeného řešení

Vzorec (10) podrobíme dalšímu zkoumání. Ověříme, zda nám dává očekávané výsledky pro $h = 0$, tedy v případě, kdy těleso dopadá do stejné výšky, jako ze které bylo vystřeleno. Vzhledem k tomu, že jsme při předchozích úpravách dělili výrazem $8gh$, platí vzorec (10) za předpokladu $h \neq 0$. Pro zjištění optimálního elevačního úhlu α při dopadu do stejné výšky, jaká byla při výstřelu, použijeme limitní přechod pro $h \to 0$. Tím dostaneme

$$\alpha = \lim_{h\to 0} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g\cdot h}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g\cdot 0}}\right)$$
$$= \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ.$$

Tento výsledek je v naprostém souladu s naším očekáváním. Z provedeného výpočtu navíc plyne, že v případě $h = 0$ je optimální úhel roven 45° při jakékoliv počáteční rychlosti. Toto je jediný případ, kdy optimální elevační úhel na počáteční rychlosti nezávisí.

Nyní můžeme odpovědět na úvodní otázku článku. Předpokládejme, že $h > 0$, tj. rovina dopadu leží níže než rovina výstřelu. Pak platí (ne)rovnosti

$$0 < v_0^2 < v_0^2 + gh,$$

resp.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} > \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}}.$$

Vzhledem k tomu, že funkce arcsinus je rostoucí na celém definičním oboru, platí i následující (ne)rovnosti

$$45^\circ = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}}\right) >$$
$$> \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}}\right) = \alpha.$$

Tím dostáváme, že pro $h > 0$ je $\alpha < 45^\circ$, a s rostoucí hodnotou h se velikost optimálního elevačního úhlu α snižuje. Ukázalo se, že v diskusi obou přátel měl pravdu Ondra.

Otázkou zůstává, zda při neomezeném růstu h klesá hodnota optimálního elevačního úhlu α k nule, či zda existuje nějaká kladná hodnota, ke které se α asymptoticky přibližuje. V následující části se proto zaměříme na situaci, kdy hodnota h roste nade všechny meze, tedy pro $h \to \infty$. Potom je

$$\alpha = \lim_{h\to\infty} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}}\right) = \arcsin 0 = 0^\circ.$$

Tím se potvrdilo, že při nekonečné výšce rozhledny vede k nejdelšímu doletu (možná paradoxně) vrh ve vodorovném směru.

Jak je tomu v případě, že rovina dopadu leží nad rovinou výstřelu, v našem případě pro $h < 0$? Potom platí

$$0 < v_0^2 + gh < v_0^2,$$

resp.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}}\right) > \\ > \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ.$$

V tomto případě se velikost optimálního elevačního úhlu zvyšuje nad 45°.

V následujících tabulkách pro lepší představu uvádíme některé hodnoty, které plynou ze vzorců (7) a (10). Tabulka 1 uvádí hodnotu optimálního elevačního úhlu (vyjádřenou ve stupních) v závislosti na vybraných hodnotách počáteční rychlosti v_0 (v $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) a hloubky h (v metrech).

Z tabulky 1 je patrný vliv počáteční rychlosti na velikost optimálního elevačního úhlu. Zatímco při nízkých počátečních rychlostech ($10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) se velikost optimálního elevačního úhlu s rostoucí hloubkou h „rychle“ blíží k nule, pro vyšší počáteční rychlosti dochází ke snižování optimálního elevačního úhlu velice zvolna.

Řada čtenářů si jistě položí otázku, jak velký rozdíl je v doletu při optimálním elevačním úhlu a elevačním úhlu 45°. Bude rozdíl v centimetrech,

metrech, či stovkách metrů? Sledujme proto, jak silný efekt má použití optimálního elevačního úhlu namísto původně předpokládaných 45°. O tom podává svědectví tabulka 2. V této tabulce jsou pro každou dvojici hodnot počáteční rychlosti a hloubky uvedeny dvě hodnoty. Horní hodnota představuje dolet (v metrech) při optimálním elevačním úhlu, spodní číslo v buňce představuje dolet při elevačním úhlu 45°.

Tabulka 1 Hodnoty optimálního elevačního úhlu pro různé počáteční rychlosti a hloubky

hloubka	10	100	1 000
poč. rychlost			
10	30	12,310	4,035
100	44,716	42,392	30
1 000	44,997	44,971	44,716

Tabulka 2 Dolet hmotného bodu pro různé počáteční rychlosti a hloubky při volbě optimálního elevačního úhlu a elevačního úhlu 45°

hloubka	10	100	1 000
poč. rychlost			
10	17,32	45,83	141,77
	16,18	37,02	105,12
100	1 009,95	1 095,45	1 732,05
	1 009,90	1 091,61	1 618,03
1 000	100 010,00	100 099,95	100 995,04
	100 010,00	100 099,90	100 990,20