Polibky kružnic: Jakob Steiner, 2. část

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Představme si n kružnic v rovině takových, že každá z nich se vně dotýká všech ostatních. Pokud je $n = 2$ nebo $n = 3$, lze jejich poloměry zvolit libovolně. Pro $n = 4$ jsou však poloměry kružnic $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, $k_3(O_3; r_3)$ a $k_4(O_4; r_4)$ vázány vztahem, který bez důkazu uvedl roku 1643 René Descartes v dopisu Alžbětě Falcké. V tomto článku se seznámíme s nejstarším známým odvozením této Descartesovy věty o kružnicích z publikace [2]. Pochází z roku 1826 a jeho autor, švýcarský geometr Jakob Steiner, provedl navíc podrobnou analýzu všech konfigurací čtyř navzájem se dotýkajících kružnic.

Uvažujme situaci na obr. 1 a stejně jako Steiner hledejme poloměr r_4 za předpokladu, že jsou dány hodnoty r_1, r_2 a r_3. Označme h_j výšku z vrcholu O_j v trojúhelníku $O_1O_2O_3$ a p_j vzdálenost středu O_4 od té strany trojúhelníku, která neobsahuje vrchol O_j. Z předchozího článku víme[1)], že pro vzdálenosti h_1 a p_1 platí

$$\frac{p_1}{r_4} = \frac{h_1}{r_1} + 2. \tag{1}$$

Steiner tuto rovnost přepsal na tvar

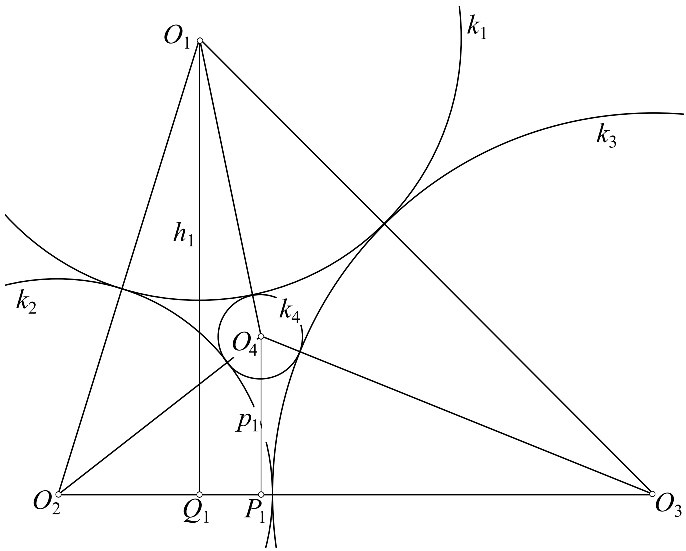
$$\frac{p_1}{h_1} = r_4\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{h_1}\Big),$$

[1)] Viz [1], vztah (8) pro druhou konfiguraci.

který sečetl se dvěma dalšími vztahy, získanými cyklickou záměnou:

$$\frac{p_1}{h_1}+\frac{p_2}{h_2}+\frac{p_3}{h_3}=r_4\Big(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{2}{h_1}+\frac{2}{h_2}+\frac{2}{h_3}\Big). \tag{2}$$

Jako samozřejmost uvedl, že levá strana rovnosti (2) je rovna jedné. Tento fakt, známý dnes spíše znalcům úloh z matematických olympiád, odvodíme.



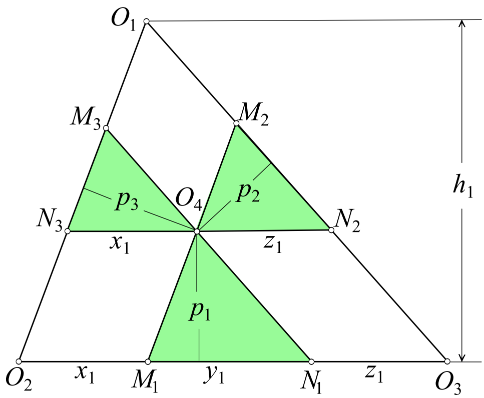
Obr. 1 Vzájemné dotyky čtyř kružnic, první situace

Na obr. 2 je znovu znázorněn trojúhelník $O_1O_2O_3$. Rovnoběžky s jeho stranami sestrojené v bodě O_4 ohraničují spolu s těmito stranami trojúhelníky $O_4M_1N_1$, $M_2O_4N_2$ a $M_3N_3O_4$ podobné trojúhelníku $O_1O_2O_3$. Koeficienty podobností, které převádí trojúhelník $O_1O_2O_3$ na tyto trojúhelníky jsou

$$k_1=\frac{y_1}{|O_2Q_3|}, \quad k_2=\frac{z_1}{|O_2Q_3|} \quad \text{a} \quad k_3=\frac{x_1}{|O_2Q_3|}.$$

Z rovnoběžníků $O_2M_1O_4N_3$ a $N_1O_3N_2O_4$ plyne $y_1+z_1+x_1=|O_2O_3|$. Odtud $k_1+k_2+k_3=1$. Dosazením $k_i=p_i/h_i$, kde $i\in\{1,2,3\}$, do posledního vztahu zjistíme

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1. \tag{3}$$



Obr. 2 K odvození vztahu (3)

Substitucí (3) ve vztahu (2) a dělením obou stran velikostí poloměru r_4 Steiner dále obdržel

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \left(\frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3}\right). \tag{4}$$

Dvojnásobek obsahu trojúhelníku $O_1O_2O_3$ lze vyjádřit pomocí Heronova vzorce nebo jako součin $|O_2O_3| \cdot h_1$. Rovnost obou vyjádření představuje po úpravě vztah

$$2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)} = (r_2 + r_3)h_1.$$

Odtud plyne

$$\frac{2}{h_1} = \frac{r_2 + r_3}{\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}.$$

Steiner tento vztah, spolu s dalšími dvěma vztahy vzniklými cyklickou záměnou, dosadil do (4) a po úpravě dostal

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2r_3}},$$

resp.

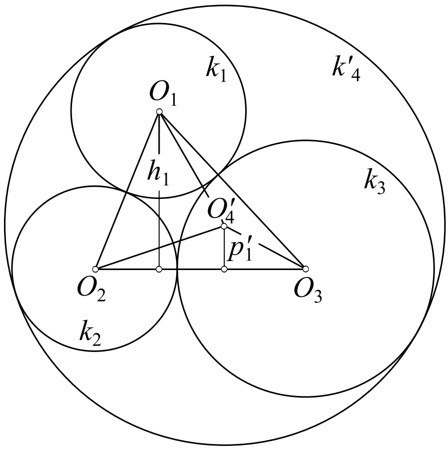
$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}}. \tag{5}$$

Zkoumal též situaci, v níž má čtvrtá kružnice, označme ji $k'_4(O'_4; r'_4)$, vnější dotyk s kružnicemi k_1, k_2 a k_3 (obr. 3). Jak již z [1] víme, je to třetí Pappova konfigurace kružnic. Proto rovnost (1) nahradil vztahem

$$\frac{p_1}{r_4} = 2 - \frac{h_1}{r_1}$$

a analogicky pak získal rovnost

$$\frac{1}{r'_4} = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}}. \tag{6}$$



Obr. 3 Vzájemné dotyky čtyř kružnic, druhá situace

Steiner počítal pouze s kladnými poloměry kružnic. Nepřipouštěl možnost přiřazení záporného znaménka poloměru některé kružnice. Proto byly jeho další úvahy poněkud zdlouhavé. Musel situaci s kružnicí k_4 odlišit od situace s kružnicí k'_4. Aby „vynikla symetrie“, nahradil poloměry kružnic jejich převrácenými hodnotami. Z dnešního pohledu to byly křivosti κ_i kružnic.

Na rozdíl od něj si další úvahy zjednodušíme dohodou o znaménkách:

Znaménková dohoda. Mají-li tři navzájem se dotýkající kružnice různé dotykové body a dvě z nich mají s třetí kružnicí vnitřní dotyk, přiřadíme poloměru (a tedy i křivosti) třetí kružnice záporné znaménko.

Po substituci $\kappa_i = 1/r_i$ mají rovnosti (5) a (6) tvar

$$\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1} \tag{7}$$

a

$$\kappa_4' = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1}. \tag{8}$$

Vidíme, že je lze považovat za kořeny kvadratické rovnice

$$\kappa^2 - (\kappa_4 + \kappa_4')\kappa + \kappa_4\kappa_4' = 0.$$

Využitím rovností (7) a (8) v poslední rovnici snadno získáme vztah

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa^2 = 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_1\kappa + \kappa_2\kappa + \kappa_3\kappa), \tag{9}$$

platný pro obě situace z obrázků 1 a 3. Steiner, který neužíval znaménkovou dohodu, získal pro situaci z obr. 1 vztah (9) a pro situaci z obr. 3 vztah, jenž se od (9) lišil jen znaménky u posledních tří sčítanců na pravé straně rovnosti.

Provedením formální substituce $\kappa = \kappa_4$ (resp. $r = r_4$), kde κ_4 (resp. r_4) značí od nynějška křivost (poloměr) libovolné kružnice, jež se dotýká všech tří kružnic k_1, k_2 a k_3, nabývá poslední rovnost při vyjádření v poloměrech symetrický tvar

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = 2\left(\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_1r_4} + \frac{1}{r_2r_4} + \frac{1}{r_3r_4}\right), \tag{10}$$

ze kterého po vynásobení součinem $r_1^2r_2^2r_3^2r_4^2$ dostaneme *Descartesův vztah*

$$\begin{gathered} r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^2r_2^2r_4^2 + r_1^2r_3^2r_4^2 + r_2^2r_3^2r_4^2 = \\ = 2\big(r_1r_2r_3^2r_4^2 + r_1r_2^2r_3^2r_4 + r_1r_2^2r_3r_4^2 + r_1^2r_2r_3^2r_4 + r_1^2r_2r_3r_4^2 + r_1^2r_2^2r_3r_4\big) \end{gathered}$$

z prvního dílu seriálu.

Jestliže obě strany vztahu (9) zvětšíme o výraz na jeho levé straně, obdržíme (po zmíněné substituci) tzv. *Soddyho rovnost* v poloměrech křivosti

$$2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2. \tag{11}$$

Anglický matematik *Philip Beecroft* zvolil roku 1842 k odvození vztahu (11) pozoruhodný a podstatně jiný přístup. Uvedeme jej v příštím, závěrečném dílu tohoto seriálu.

Literatura

[1] *Leischner, P.:* Polibky kružnic: Jakob Steiner, 1.část. MFI, roč. 26 (2017), č. 1, s. 6–13.

[2] *Steiner, J.:* Einige geometrische Betrachtungen (1826), Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1901.

Od rodiny se třemi dětmi ke spolehlivosti testů

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V tomto článku rozvineme úvahy o podmíněné pravděpodobnosti. Nejprve si zopakujme základní pojmy: budeme předpokládat, že máme nějaký *náhodný pokus*, u kterého jsme schopni předem vyjmenovat všechny jeho možné *výsledky*, které se navzájem vylučují a jeden z nich nastane vždy. *Jevem* nazveme podmnožinu množiny všech možných výsledků náhodného pokusu. Výsledky patřící jevu A nazýváme *výsledky příznivé jevu* A.

Pravděpodobnost jevu je součtem pravděpodobností výsledků, které jsou tomuto jevu příznivé. Pokud jsou všechny možné výsledky náhodného pokusu stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost jevu rovna podílu

$$\frac{\textit{počet výsledků příznivých danému jevu}}{\textit{počet všech možných výsledků}}.$$