Chyby, omyly a matematika

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

> *Jestiť matematika při vší náramné obecnosti svých pojmů předce znamenitě srozumitelná a podává, v jiných vědách upotřebena, nejen kvalitativné, nýbrž i kvantitativné výsledky, tj. ukazuje, jaký daný předmět jest, a jak velký. Mimo to nutí počet přesně mysliti; jelikož při něm téměř každý omyl zmatek způsobí, a jako nějaká bludička do bažin a bezcestí zavede.*
>
> V. Šimerka, Síla přesvědčení, s. 75.

> *Většinu chyb, kterých se dopouštíme, si neuvědomujeme jen proto, že svou vlastní práci nezkoumáme stejnýma očima, jako by to činil cizí člověk, nýbrž v zaslepenosti své sebelásky vidíme jen to dobré, kdežto slabší místa mineme.*
>
> B. Bolzano, Vědosloví, s. 426.

Úvod

Problematika chyb ve školské matematice je kardinální otázkou pojetí vzdělávání. Je-li vyučování matematice pouhé předávání poznatků formou výkladu či přednášky, musí se vyučující snažit jakýchkoliv chyb se vyvarovat – aby nešířil nesprávné informace. Každá chyba žáků pak musí být potrestána, neboť se „správnou vědu“ nenaučili. Má-li ovšem mít vyučování aspoň zčásti charakter poznávacího procesu, jsou omyly přirozenými milníky na této cestě, neboť ukazují směry hledání a umožňují nalézání správných výsledků. Vyučování matematice se tak realizuje mezi póly:

CHYBO, BUDIŽ PROKLETA — CHYBO, BUDIŽ VÍTÁNA.

Slova *omyl* a *chyba* chápu, snad v souladu s běžnou jazykovou praxí, jako synonyma. Znamenají výsledek jednání, které nedosáhlo svého cíle, jako nesprávný výkon. Ten může být nejen projevem selhání jistých psychických funkcí (např. pozornosti, paměti, myšlení, ...), jak to obvykle chápe psychologie, ale i aktuální úrovní poznání v příslušné oblasti.

V příspěvku se zamýšlím nad chybami školské matematiky, ale pro ilustraci skutečnosti, že chybami je lemována i cesta odborného matematického poznávání, uvedu i několik příkladů z historie.

Některé omyly jsou úsměvné. Např. americká herečka Joan Riversová prý čte rukopisný zápis „World War II“ jako „jedenáctá světová válka“, neboť Američané píší jednotky „bez zobáčků“ a evropská historie jí byla cizí.

Jiné jsou trapné. Setkal jsem se s absolventem střední školy, který pythagorejskou rovnost $a^2 + b^2 = c^2$ přepsal na tvar $a + b = c$.

Snad v každém případě poskytuje omyl informaci o jeho autorovi. I z tohoto hlediska je existence chyb ve vzdělávání užitečná.

Nerespektování konvencí

Mám ve své archivu vysvědčení jakési Anny Kuřinové z Obecné školy v Blsku z r. 1881, na němž pan ředitel Karel Fritz hodnotil její školní výsledky takto: *návštěva školní*: zcela náležitě (ačkoliv podle stupnice známek byly možnosti velmi pilně, pilně, méně pilně, nedbale), *v mravném chování*: zcela náležitě (možnosti: úplně přiměřeně, přiměřeně, méně přiměřeně), *v jazyce vyučovacím*: pilně (možnosti: velmi dobře, dobře, prostředně, nedostatečně), … Jak asi přijal tyto informace můj pradědeček?

V roce 1998 se americká sonda *Mars Climate Orbiter*, která měla kroužit ve svrchní atmosféře Marsu, rozbila o jeho povrch, neboť společnost, která řídila operaci během letu, posílala do řídícího centra NASA údaje o poloze rakety v mílích a stopách, tam se však domnívali, že jde o metrické jednotky.

V učebnici geometrie pro základní školy z r. 1950 se můžeme dočíst, že „čtverec je takový čtyřúhelník, který je zároveň obdélníkem a kosočtvercem“. Definujeme-li obdélník jako čtyřúhelník, jehož každé dvě sousední strany jsou k sobě kolmé, a kosočtverec, jako čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou shodné, musíme uvedenou formulaci uznat za správnou. Ovšem, pojmy se do myšlenkového světa žáka nedostávají definicemi, ale zkušenostmi a rozvíjením jazykového citu. Dítě, které se od samých začátků geometrického vzdělávání seznamuje s „protáhlými“ obdélníky a slyší ve slově obdélník vyjádření, že strany jsou jen ob jednu shodné, nebude považovat čtverec za zvláštní případ obdélníku, ale ani za kosočtverec, neboť jazyk mu napovídá, že sousední strany kosočtverce jsou „k sobě kosé“… Slova popisující pojmy mají sice charakter konvencí, definice by však měly respektovat dříve získané představy a pěstovat jazykový cit žáků. S postupem geometrického vzdělávání bychom ovšem mohli zavést pojem pravoúhelník, který zahrnuje čtverce i obdélníky.

Přijmeme-li konvenci, že na soutoku dvou řek se vlévá menší do větší, musíme považovat za omyl, že se u Mělníka vlévá Vltava do Labe. Mělo by to být naopak. Skutečně. Upřesněme nejdříve pojem *menší řeka*. Je to řeka, která je od pramene k soutoku kratší, má na soutoku menší průměrný průtok a menší povodí. Ve všech těchto parametrech vítězí Vltava (je o 200 km delší, má průtok o 50 m^3/sec větší a má i větší povodí než Labe). „Kdyby ve světě řek existovala spravedlnost, protékala by Hamburkem Vltava“, posteskl si *Ludvík Souček* v *Obrazovém opravníku obecně oblíbených omylů* z r. 1981.

Problémy s určováním velikostí geometrických útvarů nemají jen někteří žáci základních škol. *Václav Větvička* uvádí, že „v létech 1563–1566 se pokusil změřit Sněžku Slezan *Kryštof Scholing*, ale dobral se závratné výšky 5880 m. Jeho přístroj viditelně nadhodnocoval. K jinému číslu došel *Jiřík z Řásně* v roce. 1569, totiž k 2035 m. Dnešní údaje o její výšce se ustálily na 1602 m n. m.“

Tři příklady z historie

Některé omyly můžeme sledovat po tisíciletí vývoje matematické vědy, jiné pouze po desetiletí.

Ve třinácté knize *Eukleidových Základů* jsou nejdříve popsány konstrukce všech pěti typů pravidelných mnohostěnů a pak je uveden závěr: „Pravím ještě, že kromě řečených pěti útvarů nesestrojíš útvaru jiného, jenž by byl omezen stejnými úhelníky stejnostrannými a stejnoúhlými.“ Toto tvrzení není ovšem správné, neboť podle něho bychom měli počítat mezi platónská tělesa např. šestistěn, který je sjednocením dvou pravidelných čtyřstěnů, které mají jednu stěnu společnou, nebo „prostorový kříž“, který je sjednocením sedmi shodných krychlí. V podstatě stejně nesprávnou definici uvádí po více než 2 000 letech *Emil Kraemer* v knize *Zobrazovací metody*: Pravidelný mnohostěn je takový mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky. Existuje však i definice ještě méně vhodná. Např. podle oxfordského slovníku z r. 1991 je „regular pohyhedron a solid bounded by a number of equal figures“. Této definici vyhovuje např. libovolný čtyřstěn, jehož protilehlé hrany jsou shodné. Takovýto čtyřstěn je ohraničen čtyřmi shodnými ostroúhlými trojúhelníky. Správnou definici pravidelného mnohoúhelníku uvádí např. gymnaziální učebnice stereometrie *Evy Pomykalové*.

Omyly mnohých významných matematiků je lemována dlouhá cesta k objevu neeuklidovské geometrie. Tuto cestu završili, jak známo, kolem r. 1826 ruský matematik *Nikolaj I. Lobačevskij*, maďarský vědec *Janos Bolyai* a německý genius *Carl F. Gauss*. Již v Eukleidově době se pokoušeli někteří řečtí matematici odvodit V. Eukleidův postulát „Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně přímky, kde je součet menší“ z ostatních axiomů. Jejich omyly spočívaly většinou v tom, že se opírali nevědomky o některou z vět s pátým postulátem ekvivalentní, např. o věty:

Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu přímku rovnoběžnou.

Každá přímka, která protíná jednu ze dvou rovnoběžných přímek, protíná i druhou.

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

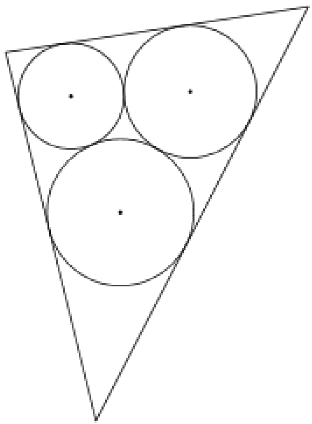
Ekvidistantou přímky je přímka.

Existují dva trojúhelníky, které mají shodné úhly, ale nejsou shodné.

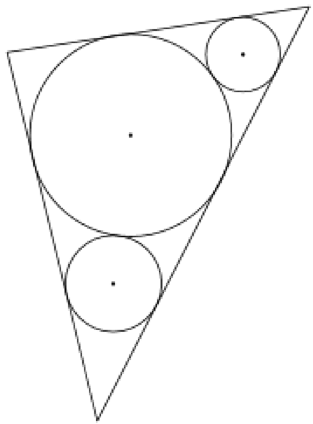
Je pozoruhodné, že mylné přesvědčení o dokazatelnosti pátého postulátu můžeme dnes vyvrátit vhodnou interpretací axiomů. Tak např. ve známém Beltrami–Kleinově modelu jsou splněny všechny axiomy geometrie roviny, až na V. Eukleidův postulát, což by nebylo možné, kdyby byl tento axiom z předchozích odvoditelný.

Problematiku nastíněnou v tomto odstavci podrobně a poutavě zpracoval *J. B. Pavlíček* v knize *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského* z r. 1952.

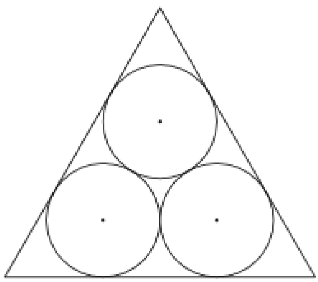
Roku 1803 formuloval italský matematik *Gian Francesco Malfatti* tvrzení, že tři navzájem se vně dotýkající kruhy, z nichž každý se dotýká dvou stran daného trojúhelníku (obr. 1), zaujímají v součtu maximálně možnou část obsahu tohoto trojúhelníku. Konstrukci takovýchto kruhů, která je popsána v Hadamardových přednáškách z geometrie, našel r. 1823 švýcarský matematik *Jakob Steiner*. Avšak již s geometrickými znalostmi žáka základní školy lze ukázat, že Malfattiho hypotéza neplatí pro rovnostranný trojúhelník. Součet obsahů kruhů na obr. 2a je menší než součet obsahů kruhů na obrátku 2b. Tento výsledek je známý od r. 1903. Roku 1965 zjistil *Howard Eves* neplatnost Malfattiho tvrzení pro „úzké dlouhé trojúhelníky“. A roku 1967 dokázal ruský matematik Michael Goldberg, že v libovolném trojúhelníku mají maximální součet obsahů tři kruhy, z nichž jeden je trojúhelníku vepsán, zbývající dva s ním mají vnější dotyk a každý se dotýká dvou stran trojúhelníku (obr. 3).



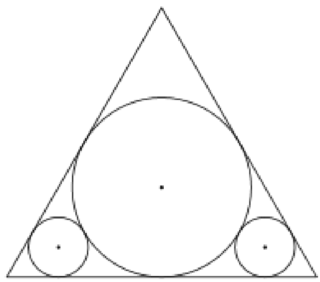
Obr. 1



Obr. 3



Obr. 2a



Obr. 2b

Matematika a jazyk

Řada problémů ve vyučování matematice souvisí se stále se snižující úrovní jazykové kultury žáků a studentů. Přitom komunikace mezi učitelem a žáky, mezi žáky navzájem a „komunikace žáků s médii“ je nepostradatelnou složkou vzdělávání. Matematika vyžaduje porozumění, její jazyk obsahuje kromě vyjadřování v obecném jazyku znalost terminologie, zvládnutí jazyka vzorců, jazyka algebry, ale i porozumění neverbálnímu vyjadřování pomocí schémat a obrázků. To všechno vyžaduje soustředěné zaměření i na problémy jazykové.

Žák musí dobře rozumět, že platí a proč platí např.: Druhá mocnina součtu se nerovná součtu druhých mocnin:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

ačkoliv druhá mocnina součinu se rovná součinu druhých mocnin

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Přitom platí: Derivace součtu funkcí se rovná součtu derivací těchto funkcí:

$$(f+g)' = f' + g',$$

ale derivace součinu funkcí se nerovná součinu jejich derivací

$$(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'.$$

Snad stojí za připomenutí, že bychom žáky měli upozornit, že analogické „jemnosti“ nejsou specifické pro matematické vyjadřování.

Připomeňme např. formulace:

„Statistika úmrtí“ není totéž jako „úmrtí statistika“.

„Potíže růstu“ je něco zcela jiného než „růst potíží“.

„Moc bezmocných“ není totéž jak „bezmoc mocných“, ...

Rovněž řada problémů logického vyjadřování, např. pomocí kvantifikátorů, tkví svými kořeny v realitě světa žáků.

Větě „Není pravda, že všichni přišli pozdě“ rozumí dítě na začátku školní docházky správně: „Aspoň jeden žák přišel včas.“

$$\neg(\forall x\ [V(x)]) \Rightarrow \exists x\ [\neg V(x)].$$

Chyby v matematickém jazyku se vyskytují (snad dosti zřídka) i v matematických textech.

Např. v jedné učebnici matematické analýzy z r. 1978 můžeme najít tuto definici:

Funkce $y = f(x)$ je omezená v definičním oboru D, právě když platí

$$\forall x \in D\, \exists k \in \mathbb{R}\ [f(x) \leq k],$$

místo správné formulace

$$\exists k \in \mathbb{R}\, \forall x \in D\ [f(x) \leq k].$$

Tuto problematiku můžeme opět přiblížit žákům vhodnými příklady. Jestliže XmY znamená osoba X *má za matku osobu* Y, pak zřejmě platí

$$\forall X\,\exists Y\ [XmY],$$

ale neplatí

$$\exists Y\,\forall X\ [XmY].$$

Jestliže $X \circ Y$ znamená *trojúhelníku* X *je opsaná kružnice* Y, pak platí

$$\forall X\,\exists Y\ [X \circ Y],$$

ale neplatí

$$\exists Y\,\forall X\ [X \circ Y].$$

Užívám zde pro stručnost symbolické vyjadřování, které je zavedeno v gymnaziální učebnici matematické analýzy autorů Dag Hrubý a Josef Kubát; podle mého názoru bychom měli tuto symboliku zavádět uváženě. Pro některé žáky může být překážkou v porozumění matematice.

V českém překladu *Thieleho* knihy *Matematické důkazy* je formulována „věta o oprávněnosti matematické indukce“ takto: Nechť výroková funkce $A(n)$ je definována pro všechna přirozená n a nechť
a) $A(1)$ je pravdivý výrok,
b) z platnosti výroku $A(n)$ pro každé n plyne též platnost výroku $A(n{+}1)$.
Potom platí $A(n)$ pro všechna přirozená čísla.

Vlastnost b) zde není formulována správně. Měla by znít např. takto:
b') z platnosti výroku $A(n)$ plyne platnost výroku $A(n+1)$ pro každé n.

V roce 1967 napsali polští autoři *Słupecki* a *Borkowski*: „V *Principiích matematiky*, významném díle z historie logiky napsaném *B. Russellem* a *A. N. Whiteheadem* je uvedeno nesprávné čtení logické spojky implikace „$A \Rightarrow B$“ jako „B je důsledek A“. Tato interpretace vede k paradoxním závěrům, např. že ze dvou libovolných výroků je první důsledkem druhého nebo druhý důsledkem prvního.“

Skutečnost, že $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ je vždy pravdivý výrok, lze snadno ověřit. Interpretace logické spojky implikace jako důsledku je ovšem záležitost jazyková a není věcně chybná. Považuji ji však z didaktického hlediska za nevhodnou. Jazyk školní matematiky by měl být v co největším souladu s žákovskou zkušeností. Vzhledem k tomu, že věty typu:

Když padne šestka, házíš ještě jednou.

Jestliže přijdeš včas, dostaneš odměnu.

vyjadřují vztahy mezi předpoklady a závěry, považuji za účelné, chápat ve vyučování implikaci jako vztah mezi výroky, nikoliv jako logickou spojku. Tuto ideu formuloval r. 1837 *Bernard Bolzano* a nově pak formuloval pojem tzv. logického vyplývání *Alfred Tarski* v r. 1935. Didaktické zpracování této problematiky lze najít např. v mém článku *Logika a vyučování matematice* z r. 1974.

Mnoho chyb se vyskytuje v neverbálním vyjadřování pomocí schémat a obrázků. Dosti podrobně jsem psal o této problematice v článku *Nevyléčitelná choroba vizuální kultury* v r. 2015.

Chyby ve školské matematice

Všimněme si nejdříve několika chyb z běžné školní praxe. Jejich příčinou bývá formální zvládnutí matematických poznatků, někdy ovšem např. i nepozornost. U některých chyb uvádím i argumenty autorů, že výsledek je správný. To může být začátek plodné diskuse k nápravě chyb.

$\sqrt{25{,}4} = 5{,}2$. Vždyť přece $5^2 = 25$ a $2^2 = 4$.

V rovnoramenném trojúhelníku s rameny r, základnou a a úhlem proti základně α platí $\sin\alpha = \frac{a}{r}$. Vždyť přece α je proti straně a a r je přepona. (Žák si nakreslil v rovnoramenném trojúhelníku výšku k základně.)

Má-li strana pravidelného šestiúhelníku délku 4 cm, má strana pravidelného dvanáctiúhelníku délku 2 cm. Když se zvětší počet stran dvakrát, musí se dvakrát zmenšit délka strany.

V libovolném trojúhelníku platí $a : b : c = \alpha : \beta : \gamma$: Vždyť proti větší straně leží větší úhel.

Tělesová úhlopříčka krychle se protíná s úhlopříčkou stěnovou. Vždyť jejich průsečík vidím na obrázku.

Snad každý učitel může uvést řadu podobných perliček ze své praxe.

Dosti častou žákovskou chybou je dílčí řešení úlohy, které není zcela špatně.

Uveďme několik typických příkladů.

Platí-li $0 \cdot x = 0$, pak $x = 0$.

Je-li $x^2 = 4$, pak $x = 2$.

$\sqrt{x^2} = x$.

Řešením rovnice $0 \cdot x = 0$ je libovolné reálné číslo.

Řešením rovnice $x^2 = 4$ jsou čísla 2 a -2.

$\sqrt{x^2} = |x|$.

Dílčí pohled na řešení problému, místo jeho celkového postižení, lze ovšem nalézt i v učebnicích dosti často. Uveďme několik příkladů ze současných nebo starších českých učebnic.

Výška trojúhelníku je vzdálenost jeho vrcholu od protilehlé strany.

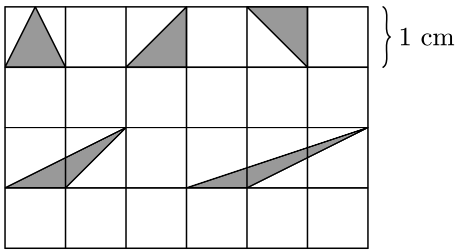
Výška lichoběžníku je vzdálenost jeho základen.

Osa úhlu je množina všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od jeho ramen.

Těmto chybným formulacím můžeme účelně předcházet vhodnými přípravnými úlohami.

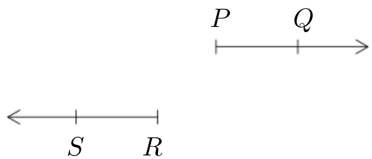
Např. v souvislosti s odvozením vzorce pro obsah trojúhelníku můžeme řešit úlohu:

Určete obsah trojúhelníků na obr. 4.



Obr. 4

Před větou o ose úhlu je účelné položit otázku: Jaká je vzdálenost polopřímek PQ a RS na obr. 5.



Obr. 5

Nesprávné je rovněž zavedení komplexních čísel a vektorů jako množin uspořádaných dvojic reálných čísel, aniž by se v definici uvedly početní operace s nimi.

V množinových diagramech neznázorňujeme jednotlivé množiny oblastmi. Hranicemi oblastí je pouze vyznačeno, kam bychom měli zařazovat obrazy prvků příslušných množin.

Setkal jsem se u univerzitních studentů např. s těmito „výpočty“:

$$22^2 + 31^2 + 35^2 = v^2 \Rightarrow 22 + 31 + 35 = v$$
$$v^2 = \sqrt{37} - 37 \Rightarrow v = \sqrt[3]{37} - \sqrt{37}.$$

Takovéto příklady ukazují na nulové povědomí jejich autorů o aritmetických zákonitostech. Zdá se mi však, že příčiny těchto chyb nelze hledat jen ve špatně realizovaném vyučování matematice. Co lze očekávat od vysokoškoláků, kteří píší např. „Očekávaly“ jsme, že „gimnázia“ nás „připravý“ na univerzitu, kde budeme „pjestovat“ vědu. Všechny tyto chyby mohu adresně doložit.

Tři úlohy pro čtenáře a jejich žáky

Inspirace Kořínkovými Základy algebry. Najděte chybu v této úvaze: Ze symetričnosti a tranzitivnosti relace R plyne její reflexivnost. Symetričnost relace R znamená: $\forall x, y\ [xRy \Rightarrow yRx]$. Aplikujeme-li tento výsledek na tranzitivnost relace R $\forall x, y, z\ [xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz]$, dostáváme $\forall x\ [xRx]$.

Vzorec pro prvočísla. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení: Neexistuje vzorec, který by pro libovolné přirozené číslo dával prvočíslo. Své tvrzení zdůvodněte. (Takový vzorec existuje.)

Pohádka o likvidaci vozového parku. Vysvětlete tuto situaci: Podnik má rozdělit 17 automobilů mezi tři podílníky tak, že první dostane polovinu, druhý třetinu a třetí devítinu z celkového počtu vozů. Správce, který vidí potíže s požadovaným dělením, se rozhodl, že dá podniku k dispozici svůj vlastní vůz. Pak bez potíží vyřešil celou situaci: první podílník dostal 9 vozů, druhý 6 a třetí 2 vozy. Správce nasedne do svého automobilu a odjede.

Závěry

Učitelé patrně učí tak, jak se sami ve školách učili. Nedostatky v matematickém vzdělání v učivu základní školy stěží odstraní škola střední, nedostatky středoškolského vzdělání neodstraní univerzita. Problémy naší školy jsou především problémy nás, učitelů.

Věda chyby, ba i domnělé chyby, tvrdě trestá. Doložme to dvěma příklady. Někdy kolem roku 500 před naším letopočtem dospěl Pythagorův žák *Hippasos z Mezoponta* k závěru, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. *Pythagoras* byl však přesvědčen, že taková čísla neexistují. Odsoudil proto Hippase k trestu smrti utopením. *S. Singh* o tom píše v knize *Velká Fermatova věta* toto: „Otec logiky a matematických metod se uchýlí k použití síly, místo aby uznal, že se mýlil. Odmítnutí iracionálních čísel je jeho největší chybou a možná největší tragédií v dějinách řecké matematiky. Iracionální čísla tak mohla vstát z mrtvých po Pythagorově smrti.“

Petr Vopěnka ovšem pokládá tuto historku za neprokázanou legendu a je přesvědčen, že k nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce dospěl sám Pythagoras. Chyby v historii (nejen matematiky) jsou patrně časté a lze o nich těžko rozhodovat.

S výrazným odsouzením objevu neeukleidovské geometrie se setkal u představitelů tehdejší vědy *I. N. Lobačevskij*. Např. akademik *Ostrogradskij* napsal: „Vše, co jsem pochopil z geometrie p. Lobačevského je více než podprůměrné. Všechno, co jsem nepochopil, bylo zřejmě špatně vyloženo. Kniha p. rektora Lobačevského je poskvrněna chybou, je nedbale napsána a nezasluhuje tudíž pozornosti Akademie.“ Vypořádávat se s chybami ve školské matematice tresty je neúčinné. Chyby žáků by měly být jednak informacemi o úrovni porozumění matematice, ale hlavně prostředkem k nalézání správné cesty k matematickým poznatkům. Je to cesta obtížná, podle mého názoru však správná. O problematice chyb ve vzdělávání z hlediska psychologického a společenského napsal řadu článků *Milan Hejný*. Z novějších uveďme např. jeho stať *Chyba jako prvek edukační strategie učitele* ve sborníku *Dvacet kapitol z didaktiky matematiky* z r. 2004.

Přestože jsme se v tomto příspěvku zabývali převážně problematikou chyb, tvoří omyly jen velmi malou část matematické produkce. Vřele souhlasím s názorem *Jaroslava Kurzweila*: „Matematika je krásná. Co platilo včera, platí i dnes.“

Nakonec si dovolím citovat známý aforismus: Existují tři typy lidí: Ti, kteří dovedou počítat a ti, kteří počítat nedovedou.

Literatura

[1] *Hadamard, J.*: Lessons in Geometry. AMS, Newton, 2008.

[2] *Hejný, M. a kol.*: Dvacet kapitol z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Praha, 2004.

[3] *Kuřina, F.*: Logika a vyučování matematice. Matematika a fyzika ve škole, roč. 6,7 (1975).

[4] *Kuřina, F.*: Nevyléčitelná choroba vizuální kultury. Učitel matematiky, roč. 23 (2015), č. 3, s. 185–192.