Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 233 a 234 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 235

Na jednotkové kružnici se středem S je dána konečná množina oblouků délek menších než π, přitom součet délek všech oblouků je větší než 2π. Dokažte, že existuje přímka procházející bodem S, která protíná aspoň tři z těchto oblouků.

Jacek Uryga (*Katowice*)

Úloha 236

Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou BC je dán bod D tak, že $|DB| = |DC|$. Pro vnitřní bod E odvěsny AB platí $DE \parallel AC$. Pro vnitřní bod F přepony BC platí $|EB| = |EF|$. Dokažte, že AF je kolmé na BD.

Patrik Bak

Dále uvádíme řešení úloh 231 a 232, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 231

Nechť S je střed pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{12}$. Označme R průsečík přímek A_4A_9 a A_6A_{11}. Dokažte, že čtyřúhelník A_9RSA_{11} je tětivový.

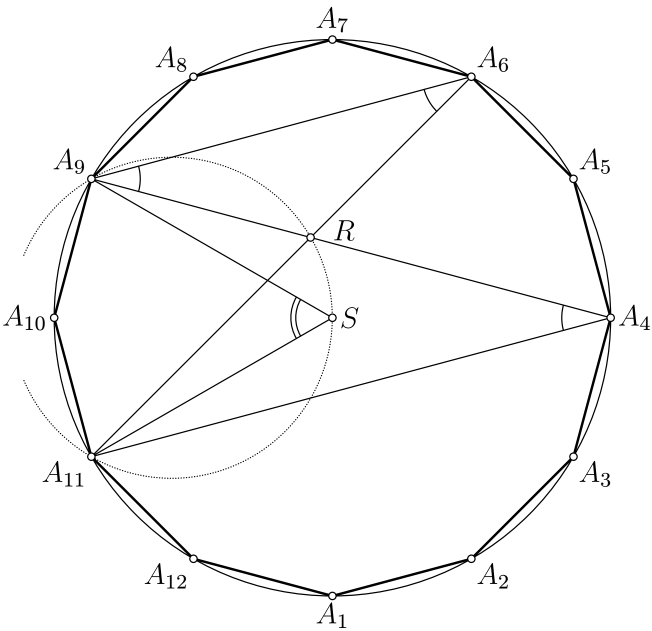
Karel Pazourek

Řešení. Podle věty o obvodovém úhlu stačí dokázat, že úhly A_9SA_{11} a A_9RA_{11} mají stejnou velikost.

Uvědomme si, že vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku leží na kružnici se středem S. Velikost úhlu A_9SA_{11} je zřejmě

$$\frac{2}{12} \cdot 360^\circ = 60^\circ.$$

Podle věty o obvodovém úhlu jsou velikosti úhlů $A_9A_4A_{11}$ a $A_9A_6A_{11}$ rovny polovině velikosti středového úhlu A_9SA_{11}, tedy 30°. Úsečky A_4A_6 a A_9A_{11} mají shodnou velikost, čtyřúhelník $A_4A_6A_9A_{11}$ je tak rovnoramenný lichoběžník a úhly $A_9A_4A_{11}$ a $A_4A_9A_6$ jsou shodné. Velikost vnějšího úhlu A_9RA_{11} trojúhelníku A_6A_9R je rovna součtu velikostí jeho vnitřních úhlů u vrcholů A_9 a A_6, tedy 60°, což jsme chtěli dokázat.



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z ETH Zürich,

Úloha 232

Je dán obdélník O s celočíselnými délkami stran a obvodem 28. Dokažte, že z kruhu o poloměru 10 lze vystřihnout čtyři kopie obdélníku O.

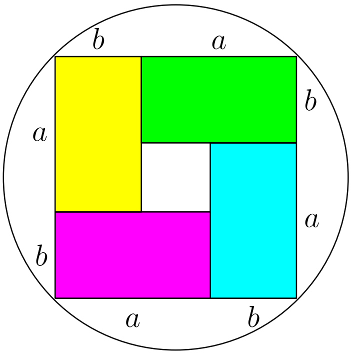
Josef Tkadlec

Řešení podle Martina Raszyka.

Označme a, b délky stran obdélníku O. Jeho obvod je 28, platí tedy

$$a + b = 14.$$

Ze čtverce se stranou 14 lze podle obrázku vystřihnout čtyři kopie obdélníku O.



Pro délku u úhlopříčky tohoto čtverce platí

$$u = \sqrt{2 \cdot 14^2} = \sqrt{392} < \sqrt{400} = 20.$$

Existuje proto kruh s průměrem 20 (a poloměrem 10), který ho celý pokrývá. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Správná řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Karol Gajdoš* z Trnavy. *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek