Příloha časopisu

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Ročník 26 (2017), číslo 3

Úlohy I. kola (domácí část) 67. ročníku MO (kategorie A, B, C)

KATEGORIE A

A–I–1

Pavel střídavě vpisuje křížky a kolečka do políček tabulky (začíná křížkem). Když je tabulka celá vyplněná, výsledné skóre spočítá jako rozdíl $O - X$, kde O je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více koleček než křížků a X je celkový počet řádků a sloupců obsahujících více křížků než koleček.

a) Dokažte, že pro tabulku $2 \times n$ bude výsledné skóre vždy 0.

b) Určete nejvyšší možné skóre dosažitelné pro tabulku $(2n + 1)\times(2n + 1)$ v závislosti na n.

(*Josef Tkadlec*)

A–I–2

Dokažte, že pokud je součet dvou daných reálných čísel a, b větší než 2, má soustava nerovnic

$$(a - 1)x + b < x^2 < ax + (b - 1)$$

nekonečně mnoho řešení x v oboru reálných čísel.

(*Jaromír Šimša*)

A–I–3

V rovině jsou dány dvě shodné kružnice o poloměru 1, které mají vnější dotyk. Uvažujme pravoúhelník obsahující obě kružnice, jehož každá strana se dotýká aspoň jedné z nich. Určete největší a nejmenší možný obsah takového pravoúhelníku.

(*Jaroslav Švrček*)

A–I–4

Najděte největší přirozené číslo n takové, že hodnota součtu

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

je prvočíslo. Zápis $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které není větší než x.

(*Patrik Bak*)

A–I–5

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|.$$

Předpokládejme, že střed O kružnice opsané trojúhelníku BCD je různý od bodu A. Dokažte, že úhel OAC je pravý.

(*Patrik Bak*)

A–I–6

Najděte největší možný počet prvků množiny M celých čísel, která má následující vlastnost: Z každé trojice různých čísel z M lze vybrat některá dvě, jejichž součet je mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem.

(*Ján Mazák*)

KATEGORIE B

B–I–1

Najděte všechny mnohočleny tvaru

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

které při dělení dvojčlenem $2x^2 + 1$ dávají zbytek $x + 2$ a při dělení dvojčlenem $x^2 + 2$ dávají zbytek $2x + 1$.

(*Pavel Calábek*)

B–I–2

Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo t platí nerovnosti

$$0 \le \frac{t^2 + 1}{t + 1} - \sqrt{t} \le |t - 1|.$$

(*Tomáš Jurík*)

B–I–3

Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod.

(*Jaroslav Švrček*)

B–I–4

Určete počet všech trojic přirozených čísel a, b, c, pro která platí

$$a + ab + abc + ac + c = 2017.$$

(*Patrik Bak*)

B–I–5

Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Uvažujme obě přímky, z nichž každá dělí daný lichoběžník na dvě části stejného obsahu a je přitom rovnoběžná s jeho úhlopříčkou AC, resp. BD. Dokažte, že průsečík těchto dvou přímek leží na úsečce, která spojuje středy obou základen AB a CD.

(*Jaromír Šimša*)

B–I–6

Najděte největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny

$$\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$$

tak, aby mezi nimi nebyla žádná dvě, která se liší o 2 nebo o 5.

(*Pavel Calábek*)

KATEGORIE C

C–I–1

Najděte nejmenší čtyřmístné číslo $\overline{abcd}$ takové, že rozdíl

$$(\overline{ab})^2 - (\overline{cd})^2$$

je trojmístné číslo zapsané třemi stejnými číslicemi.

(*Patrik Bak, Mária Dományová*)

C–I–2

Určete největší možný počet neprázdných po dvou disjunktních množin se stejnými součty prvků, na které lze rozdělit množinu

a) $\{1, 2, \ldots, 2017\}$,

b) $\{1, 2, \ldots, 2018\}$.

Je-li množina tvořena jedním číslem, považujeme ho za součet jejích prvků.

(*Patrik Bak*)

C–I–3

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, v němž D značí patu výšky z vrcholu C. V polorovině s hraniční přímkou AB a vnitřním bodem C uvažujme body E, F takové, že úhly EBA, FAB jsou pravé, $|BE| = |BD|$ a $|AF| = |AD|$. Dokažte, že přímky AE a BF se protínají na úsečce CD.

(*Jaroslav Švrček*)

C–I–4

Určete největší celé číslo n, při kterém lze čtvercovou tabulku $n \times n$ zaplnit přirozenými čísly od 1 do n^2 tak, aby v každé její čtvercové části 3×3 byla zapsána aspoň jedna druhá mocnina celého čísla.

(*Jaromír Šimša*)

C–I–5

Je dána kružnice $k(O, r)$ a bod A, kde $|AO| = d > r$. Tečny z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech B, C. Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice. Vyjádřete její poloměr ρ pomocí daných délek d a r.

(*Šárka Gergelitsová*)

C–I–6

Na kruhovém opevnění hradu je několik věží. Do nich se rozmístí pět černých a pět rudých rytířů (v každé věži jich může být více i různých barev) a začnou strážit. Po uplynutí každé hodiny přejdou všichni černí rytíři do sousední věže ve směru chodu hodinových ručiček a všichni rudí rytíři přejdou do sousední věže v opačném směru. Dokažte následující tvrzení:

a) Je-li věží osm, mohou se rytíři na počátku rozmístit tak, že během každé hodiny bude v každé věži aspoň jeden rytíř.

b) Je-li věží sedm, některou hodinu zůstane aspoň jedna věž neobsazená, ať se na počátku rytíři rozmístí jakkoliv.

(*Pavel Calábek*)