Newtonova a Maclaurinovy nerovnosti

PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod do diferenciálního a integrálního počtu může být (s ohledem na RVP a ŠVP) jedním ze závěrečných témat výuky matematiky na středních školách, ať už v povinné nebo rozšířené podobě. Středoškoláci si často uvědomí sílu těchto prostředků zejména při studiu vlastností funkcí. Mnozí z nich si proto své vědomosti rozšiřují samostudiem. To však často vede k tomu, že si při samostudiu neuvědomí některé významné možnosti a důsledky využití diferenciálního počtu, které se objevují např. při zkoumání průběhu reálné funkce jedné reálné proměnné. Jedním z těchto důsledků je velmi zajímavá (nikoliv však známá) Newtonova nerovnost.

Během středoškolského studia se žáci seznamují s různými průměry souborů reálných čísel, odvozují a používají nerovnosti mezi nimi. Základním z těchto průměrů je aritmetický průměr $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-tice nezáporných reálných čísel, dalším je geometrický průměr $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ této n-tice, často znají též harmonický průměr $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ či kvadratický průměr $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-tice kladných reálných čísel. Ti, kteří se hlouběji seznámí s uvedenými průměry, znají i zobecnění těchto průměrů – tzv. mocninný průměr $M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálného stupně p a nerovnosti mezi nimi. Definujme nejprve tyto průměry.

$$
\begin{aligned}
A(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \\
G(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \\
H(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}, \\
K(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}, \\
M_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= G(x_1, x_2, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

$$M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \neq 0.$$

Zvídaví žáci se mohli seznámit s nerovnostmi mezi těmito průměry např. v [2] nebo [3].

Věta

Pro libovolná kladná (nezáporná) reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \\ \leq A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq K(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ p < q \Rightarrow M_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M_q(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

přitom rovnosti nastávají jedině v případě $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Žáky také často zajímá, zda nějaký „průměr leží mezi" aritmetickým a geometrickým průměrem. Mezi těmito průměry zřejmě leží libovolný mocninný průměr stupně $p \in (0; 1)$. Následující příspěvek ukazuje, že podobné „průměry" můžeme konstruovat i jiným způsobem, například pomocí Maclaurinových nerovností.

Symetrické součty

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nyní libovolná *reálná* čísla, definujme $n + 1$ symetrických součtů S_i následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} S_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1, \\ S_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= A(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ S_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n}{\binom{n}{2}}, \\ S_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n}{\binom{n}{3}}, \\ &\vdots \\ S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2\ldots x_n. \end{aligned}$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme značit $S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jako S_i. Symetrický součet S_i je tak aritmetickým průměrem všech $\binom{n}{i}$ součinů i různých čísel z n-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Newtonova nerovnost

Nyní dokážeme tzv. Newtonovy nerovnosti, viz např. [4].

Věta

Pro libovolné číslo $i = 1, 2 \dots, n-1$ platí

$$S_{i-1}S_{i+1} \leq S_i^2.$$

Nástin důkazu: Nejdříve prozkoumejme případ tří reálných proměnných x_1, x_2, x_3. Platí

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad S_2 = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3}, \quad S_3 = x_1x_2x_3.$$

Newtonova nerovnost $S_0S_2 \leq S_1^2$ pro $i = 1$ znamená

$$1 \cdot \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2.$$

Po několika elementárních úpravách zjistíme, že tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

která je ovšem ekvivalentní s platnou nerovností

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2.$$

(Zde dokonce vidíme, proč rovnost nastane pouze v případě $x_1 = x_2 = x_3$.)

Newtonova nerovnost $S_1S_3 \leq S_2^2$ v případě tří proměnných značí

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot x_1x_2x_3 \leq \left(\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3}\right)^2.$$

Pokud je některé z čísel x_i rovno nule, tato nerovnost zřejmě platí, protože na její levé straně je 0, na pravé straně je nezáporné číslo. V případě $x_1x_2x_3 \neq 0$ přejdeme vydělením obou stran této nerovnosti kladným číslem $x_1^2x_2^2x_3^2$ k ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_2x_3} + \dfrac{1}{x_3x_1}}{3} \leq \left(\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}}{3}\right)^2,$$

která ovšem platí, protože je to již dokázaná nerovnost

$$S_0\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}\right)\cdot S_2\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}\right)\le S_1^2\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}\right).$$

Tyto úvahy pro tři proměnné nám naznačují způsob, jak dokázat Newtonovu nerovnost v obecném případě n proměnných pro $i=1$ a $i=n-1$. Pro obecné n a $i=1$ postupnými úpravami dostáváme

$$S_1^2-S_0S_2=\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2-\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j}{\binom{n}{2}}=$$

$$=\frac{(n-1)\sum\limits_{1\le i\le n}x_i^2-2\cdot\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j}{n^2(n-1)}=\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2}{n^2(n-1)}.$$

Přitom poslední výraz je jistě nezáporný, proto platí $S_1^2-S_0S_2\ge 0$, tedy Newtonova nerovnost platí v případě $i=1$.

V případě obecného n a $i=n-1$ opět zjistíme, že pokud je některé z čísel x_i rovno nule, pak nerovnost

$$S_{n-2}S_n\le S_{n-1}^2$$

platí, protože vlevo je 0 a vpravo nezáporné číslo. V případě $x_1x_2\ldots x_n\neq 0$ vydělením obou stran této nerovnosti kladným číslem $x_1^2x_2^2\ldots x_n^2$ ekvivalentně přejdeme k již dokázané nerovnosti

$$S_0\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)\cdot S_2\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}\right)\le S_1^2\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}\right).$$

Dále použijeme základních poznatků diferenciálního počtu k tomu, abychom dokázali Newtonovu nerovnost i pro zbývající $i=2,3,\ldots,n-2$.

Uveďme dále jednu důležitou větu, kterou v důkazu využijeme.

Věta (Rolleova)

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, má derivaci na intervalu (a,b) a platí $f(a)=f(b)$. Potom existuje $\xi\in(a,b)$ tak, že $f'(\xi)=0$.

Čísla x_i uspořádejme podle velikosti a pro jednoduchost dále předpokládejme, že platí

$$x_1<x_2<\ldots<x_n.$$

Uvažujme polynom

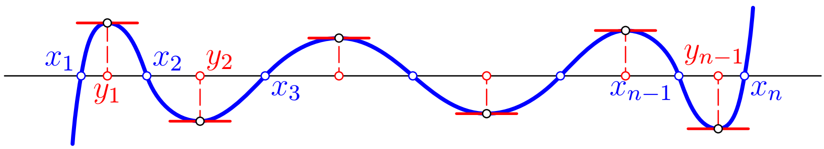
$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Každý polynom je funkce, která je spojitá a má derivaci pro všechna reálná čísla. Užitím Viètových vztahů mezi kořeny a koeficienty dostáváme

$$P(x) = x^n - nS_1x^{n-1} + \binom{n}{2}S_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n S_n.$$

Podle Rolleovy věty existuje (alespoň) $n-1$ různých čísel $y_i \in (x_i, x_{i+1})$, která jsou kořeny rovnice

$$P'(x) = 0. \tag{1}$$



Obr. 1

Podle základní věty algebry však víme, že existuje nejvýše $n-1$ reálných kořenů rovnice (1), proto jsou to právě čísla $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Derivováním polynomu $P(x)$ dostaneme

$$P'(x) = nx^{n-1} - (n-1)nS_1x^{n-2} + (n-2)\binom{n}{2}S_2x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1}S_{n-1}.$$

Označme symbolem T_i symetrické součty proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ pro $i = 1, \ldots, n-1$, tedy

$$T_0 = 1,\ T_1 = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}}{n-1},\ T_2 = \frac{y_1y_2 + y_1y_3 + \ldots + y_{n-2}y_{n-1}}{\binom{n-1}{2}},\ \ldots$$

Opětovným užitím Viètových vztahů obdržíme

$$\begin{aligned} P'(x) &= n(x - y_1) \dots (x - y_{n-1}) = \\ &= n\left[x^{n-1} - (n-1)T_1x^{n-2} + \binom{n-1}{2}T_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x ve dvojím vyjádření $P'(x)$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} n(n-1)T_1 &= (n-1)nS_1, \\ n\binom{n-1}{2}T_2 &= (n-2)\binom{n}{2}S_2, \\ n\binom{n-1}{3}T_3 &= (n-3)\binom{n}{3}S_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Užitím známé kombinatorické identity (pro $0 \leq k \leq n-1$)

$$n\binom{n-1}{k} = (n-k)\binom{n}{k}$$

tak dostaneme (ke zřejmému $S_0 = 1 = T_0$)

$$S_1 = T_1,\ S_2 = T_2,\ \ldots,\ S_{n-1} = T_{n-1}. \tag{2}$$

Podobně bychom mohli postupovat i v případě, kdyby se některá z čísel x_i sobě rovnala, pak bychom uvažovali o násobných kořenech polynomů a dostali bychom stejné tvrzení. To znamená, že libovolnou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ můžeme nahradit $(n-1)$-ticí $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ tak, že platí (2).

Protože už výše jsme pro $(n-1)$-tici $y_1, \ldots, y_{n-1}$ a $i = n-2$ dokázali, že $T_{n-3}T_{n-1} \leq T_{n-2}^2$, plyne odtud

$$S_{n-3}S_{n-1} \leq S_{n-2}^2.$$

Podobným nahrazováním můžeme dále dokazovat Newtonovu nerovnost pro všechna zbývající čísla $i > 1$.

Maclaurinovy nerovnosti

Nyní na rozdíl od Newtonovy nerovnosti předpokládejme, že x_i jsou pro $i = 1, 2, \ldots, n$ *kladná* reálná čísla. Potom všechny symetrické součty S_i jsou kladná čísla.

Z Newtonovy nerovnosti

$$S_0S_2 \leq S_1^2$$

při využití $S_0 = 1$ dostaneme odmocněním (které je v případě kladných čísel ekvivalentní úpravou) nerovnost

$$\sqrt{S_2} \leq S_1.$$

Odtud a z Newtonovy nerovnosti

$$S_1 S_3 \leq S_2^2$$

dostaneme dohromady dvojici nerovností

$$\sqrt{S_2} S_3 \leq S_1 S_3 \leq S_2^2,$$

z níž porovnáním krajních výrazů po odmocnění získáme

$$\sqrt[3]{S_3} \leq \sqrt{S_2}.$$

Tuto nerovnost můžeme podobně vhodně uplatnit k další nerovnosti. Takto opakovaně dojdeme k výsledku zvanému *Maclaurinovy nerovnosti*.

Věta

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je n-tice kladných reálných čísel. Potom platí

$$S_1 \geq \sqrt{S_2} \geq \sqrt[3]{S_3} \geq \ldots \geq \sqrt[n]{S_n}.$$

Jednoduchým zobecněním můžeme dostat, že Maclaurinovy nerovnosti platí dokonce pro libovolnou n-tici nezáporných reálných čísel. Pokud si rozmyslíme důkaz Newtonových nerovností, tak v případě kladných reálných čísel nemáme problémy s dělením 0 a můžeme dokonce dokázat, že rovnost v Maclaurinových nerovnostech nastává pouze v případě, když $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Pokud uvážíme, že S_1 je aritmetický průměr čísel $x_1, \ldots, x_n$ a $\sqrt[n]{S_n}$ je geometrický průměr těchto čísel, Maclaurinova nerovnost nám dává další „průměry“, které se nacházejí mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Ještě jedna aplikace

V předchozích kapitolách jsme viděli, jaké zajímavé netriviální důsledky mají pozorování o průběhu funkce, se kterými se studenti seznamují na střední škole. Nyní uveďme jeden příklad, při jehož řešení se s výhodou dají použít tyto poznatky o průběhu funkce.

Příklad (60. MO–A–III–3)

Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25.

b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5.

V [1] se můžete seznámit s několika řešeními tohoto příkladu. Nyní uveďme ještě další, které využívá poznatků o průběhu funkce.

Z rovnosti

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

dostaneme při využití předpokladů úlohy

$$xy + yz + zx = 45.$$

Podle Viètových vztahů jsou čísla x, y, z kořeny rovnice

$$t^3 - 12t^2 + 45t - S = 0,$$

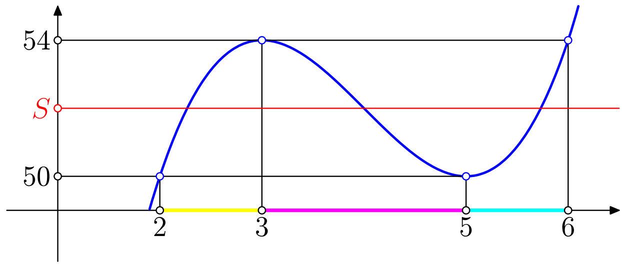
kde $S = xyz$ je reálné číslo, které budeme dále považovat za parametr.

Pro řešení získané rovnice

$$t^3 - 12t^2 + 45t = S.$$

vyšetříme užitím diferenciálního počtu průběh kubické funkce $f(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ (obr. 2). Mimo jiné zjistíme, že tato funkce nabývá svého lokálního maxima 54 v bodě 3 a lokálního minima 50 v bodě 5. Dále můžeme snadno ověřit, že $f(2) = 50$ a $f(6) = 54$.

Rovnice $f(t) = S$ tak má tři reálné kořeny, právě když S je z intervalu $\langle 50; 54\rangle$.



Obr. 2

Z obr. 2 pak jednoduše vidíme, že jeden z kořenů této rovnice leží v intervalu $\langle 2;3\rangle$, druhý v intervalu $\langle 3;5\rangle$ a třetí v intervalu $\langle 5;6\rangle$. Tím jsme dokázali část b).

Čísla xy, yz, zx jsou hodnoty funkce

$$S/t = t^2 - 12t + 45 = (t-6)^2 + 9$$

po řadě v bodech z, x a y. Protože tyto kořeny rovnice $f(t) = S$ leží v intervalu $\langle 2;6\rangle$, nabývá funkce S/t na tomto intervalu zřejmě hodnot z intervalu $\langle 9;25\rangle$, což dokazuje část a).

Závěr

V předloženém textu jsme čtenáře seznámili s několika zajímavými důsledky užití diferenciálního počtu při zkoumání průběhu funkce, které může učitel na střední škole použít jako rozšiřující materiál pro talentované žáky při výuce tématu užití diferenciálního počtu při vyšetřování průběhu funkce.

Literatura

[1] http://www.matematickaolympiada.cz/media/440775/A60iii.pdf [cit. 2017-06-07].

[2] *Herman J., Kučera R., Šimša J.*: Metody řešení matematických úloh I, Masarykova univerzita, Brno, 1996.

[3] *Kufner A.: Nerovnosti a odhady*, Škola mladých matematiků sv. 39, ÚV Matematické olympiády, Mladá fronta, Praha, 1976, [online]. http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403877

[4] *Přinosil, M.*: Důkazy nerovností prostředky matematické analýzy, disertační práce, MU Brno, 2011, [online]. https://is.muni.cz/th/52068/prif_d/disertace.pdf