MATEMATIKA

Využití diskriminantu kvadratické rovnice

JAROSLAV ŠVRČEK – DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pojem diskriminantu kvadratické rovnice patří mezi základní pojmy středoškolské matematiky. Setkáváme se s ním nejen při řešení kvadratických rovnic, ale také při studiu kvadratických funkcí nebo při určování tečen ke kuželosečkám. Cílem článku, který je určen především učitelům pracujícím s nadanými žáky, je poukázat na další možnosti využití známých vlastností diskriminantu při důkazech některých typů algebraických nerovností, při řešení jistých typů diofantovských rovnic a také při hledání extrémů některých funkcí bez použití diferenciálního počtu.

K pochopení uvedené problematiky nejsou potřebné žádné speciální znalosti přesahující rámec středoškolské matematiky. Připomeňme nyní základní pojmy, které budeme v tomto příspěvku používat.

Kvadratickou rovnicí o neznámé x s reálnými koeficienty $a \neq 0$, b, c rozumíme rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Jak známo, tato kvadratická rovnice má dva reálné kořeny, právě když její *diskriminant* $D = b^2 - 4ac$ je nezáporný. V opačném případě má tato rovnice dva komplexně sdružené kořeny. Pro $D < 0$ nemá graf funkce $y = ax^2 + bx + c$ s osou x kartézského souřadnicového systému Oxy žádný společný bod.

Jednotlivé aplikace diskriminantu kvadratické rovnice budou dále prezentovány a komentovány při řešení konkrétních úloh. V závěru článku jsou pak uvedeny některé další neřešené úlohy k procvičení uvedených postupů.

1. Důkazy algebraických nerovností

Vlastnosti diskriminantu lze, jak vzápětí ukážeme, efektivně využít v důkazech algebraických nerovností, v nichž aspoň jedna z proměnných v dokazované nerovnosti je stupně 2.

Příklad 1 (6. česko-polsko-slovenská MO juniorů, 2017, viz [1])
Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$(x^2+1)(y^2+1) \geq 2(xy-1)(x+y).$$

Řešení. Danou nerovnost přepíšeme do ekvivalentního tvaru

$$(y-1)^2x^2 - 2(y^2-1)x + (y+1)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Je-li $y = 1$, je nerovnost (1) a také daná nerovnost splněna triviálně pro všechna reálná čísla x. Předpokládejme dále, že $y \neq 1$. V tomto případě lze na levou stranu (1) pohlížet jako na kvadratickou funkci o proměnné x a (reálném) parametru y. Snadno se vidí, že pro diskriminant odpovídající kvadratické rovnice platí

$$D = 4(y-1)^2(y+1)^2 - 4(y-1)^2(y+1)^2 = 0.$$

Vzhledem k tomu, že koeficient u kvadratického členu zkoumané funkce je kladný (platí totiž $(y-1)^2 > 0$), je nerovnost (1) splněna pro libovolné reálné číslo x a pro libovolné $y \neq 1$. Tím jsme dokázali platnost dané nerovnosti pro všechna reálná čísla x, y.

Poznámka. Důkaz dané nerovnosti lze mj. vést např. využitím skutečnosti, že levá strana ekvivalentní nerovnosti (1) je druhou mocninou výrazu

$$x(y-1) - (y+1),$$

kde x, y jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 2 (Cauchyho-Schwarzova nerovnost)
Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ platí nerovnost

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2) \geq (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2. \tag{2}$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení. Pokud $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ nebo $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, je nerovnost (1) splněna triviálně a navíc v ní nastane rovnost. Předpokládejme dále, že $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0$, a uvažujme funkci $f(\lambda)$, kde

$$f(\lambda) = (\lambda x_1 - y_1)^2 + (\lambda x_2 - y_2)^2 + \ldots + (\lambda x_n - y_n)^2 \tag{3}$$

s reálnými parametry x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Je zřejmé, že funkce $f(\lambda)$ nabývá pro všechna reálná čísla λ nezáporných hodnot, a to bez ohledu na volbu reálných parametrů x_i, y_i. Funkční předpis (3) upravíme dále (s ohledem na předpoklad $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0$) do tvaru kvadratické funkce s proměnnou λ a reálnými parametry x_i, y_i. Platí

$$f(\lambda) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)\lambda^2 - 2(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)\lambda + (y_1^2 + \ldots + y_n^2) \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že tato kvadratická funkce nabývá výhradně nezáporných hodnot, je její diskriminant D je nekladný, tj. platí nerovnost

$$D = 4(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 - 4(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \le 0.$$

Odtud již bezprostředně plyne nerovnost (2) a důkaz je tedy i v tomto případě uzavřen.

Rovnost v (2) nastane s ohledem na tvar (3) funkce $f(\lambda)$, právě když existuje reálné číslo λ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $\lambda x_i = y_i$ nebo pokud $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

2. Řešení diofantovských rovnic

V této části poukážeme na možnost využití diskriminantu kvadratické rovnice při řešení některých typů diofantovských rovnic. Níže prezentovaný postup se často nazývá *metoda diskriminantu.*

Příklad 3

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovujících rovnici

$$x^2 + x + 1 = y^2.$$

Řešení. Danou diofantovskou rovnici můžeme řešit jako kvadratickou rovnici s neznámou x a celočíselným parametrem y ve tvaru

$$x^2 + x + (1 - y^2) = 0. \tag{5}$$

Snadno se přitom vidí, že pro každý celočíselný parametr y ($y \neq 0$) je diskriminant $D = 4y^2 - 3$ rovnice (5) kladný. K tomu, aby kvadratická rovnice (3) měla celočíselný kořen x je nutné (nikoliv však postačující), aby hodnota jeho diskriminantu byla druhou mocninou některého přirozeného čísla, tj. aby platilo

$$4y^2 - 3 = m^2,$$

kde m je přirozené číslo (právě tento krok je často označován jako metoda diskriminantu). Po úpravě poslední rovnice dostaneme

$$4y^2 - m^2 = (2y - m)(2y + m) = 3. \tag{6}$$

Protože pravá strana rovnice (6) má prvočíselnou hodnotou, máme právě dvě možnosti, jak rozložit prvočíslo 3 na součin dvou celočíselných činitelů. Platí tedy (bez ohledu na pořadí činitelů)

$$(2y - m)(2y + m) = 3 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3).$$

Vzhledem k tomu, že m je přirozené číslo, je $2y - m < 2y + m$. Stačí tedy uvažovat pouze následující dvě soustavy lineárních rovnic o neznámých y a m. První z nich

$$\begin{aligned} 2y - m &= 1, \\ 2y + m &= 3 \end{aligned}$$

má řešení $y = 1$, $m = 1$ a pro diskriminant D příslušné kvadratické rovnice platí $D = 1$. Odpovídající hodnoty neznámé x v dané diofantovské rovnici pro nalezenou hodnotu y získáme dosazením $y = 1$ do rovnice (5) a řešíme tak kvadratickou rovnici $x^2 + x = 0$, která má celočíselné kořeny 0 a -1.

Podobně řešením druhé soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2y - m &= -3, \\ 2y + m &= -1 \end{aligned}$$

dostáváme $y = -1$ a $m = 1$. Dosazením za y do (5) řešíme stejnou kvadratickou rovnici jako v předchozím případě s kořeny 0 a -1.

ZÁVĚR. Daná diofantovská rovnice má čtyři celočíselná řešení, jimiž jsou uspořádané dvojice $(x, y) \in \{(0; 1), (-1; 1), (0; -1), (-1; -1)\}$.

Poznámka. Z pohledu analytické geometrie kuželoseček představuje daná rovnice v příkladu 3 rovnici hyperboly. Závěr řešení této úlohy nás přitom vede k zajímavému zjištění: Na obou větvích této hypeboly leží pouze 4 body s oběma celočíselnými souřadnicemi (tzv. mřížové body). Jejich souřadnice korespondují s řešeními dané úlohy.

Příklad 4 (50. Běloruská MO, 2000)

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0.$$

Řešení. Danou diofantovskou rovnici nejprve upravíme do tvaru kvadratické rovnice

$$yx^2 + (y^2 - 36)x + y(y - 6)^2 = 0 \tag{7}$$

s neznámou x a s celočíselným parametrem y. Je-li $y = 0$, pak podle (7) platí i $x = 0$, a dvojice $(x, y) = (0; 0)$ je řešením dané rovnice.

Dále nechť $y \neq 0$. Diskriminant D kvadratické rovnice (7) musí být nutně nezáporný a navíc musí být druhou mocninou některého celého nezáporného čísla. Platí přitom

$$D = (y^2-36)^2-4y^2(y-6)^2 = (y-6)^2[(y+6)^2-4y^2] = 3(y-6)^2(6-y)(y+2).$$

Odtud plyne, že buď $y - 6 = 0$, tj. $y = 6$, nebo součin $3(6 - y)(y + 2)$ musí být druhou mocninou některého celého nezáporného čísla. Řešením kvadratické nerovnice

$$(6 - y)(y + 2) \geq 0$$

zjistíme, že hledaná celá čísla y patří do uzavřeného intervalu $\langle -2; 6\rangle$. Postupným dosazením všech devíti celočíselných hodnot y z tohoto intervalu do výrazu $3(6 - y)(y + 2)$ snadno zjistíme, že tento výraz je dvojmocí některého celého nezáporného čísla, pouze pokud y nabývá některou ze tří celočíselných hodnot -2, 4 nebo dříve určené číslo 6.

Tím dostáváme další čtyři celočíselná řešení dané rovnice, kterými jsou uspořádané dvojice $(-8; -2)$, $(1; 4)$, $(4; 4)$ a $(0; 6)$.

Závěr. Daná diofantovská rovnice má pět celočíselných řešení, jimiž jsou uspořádané dvojice $(x, y) \in \{(0; 0), (-8; -2), (1; 4), (4; 4), (0; 6)\}$.

3. Vyšetřování extrémů funkcí

Hledání extrémů, tj. nalezení největší a nejmenší hodnoty dané funkce jedné reálné proměnné na svém definičním oboru patří mezi základní úkoly při zkoumání průběhu dané funkce. Při řešení následujících dvou úloh ukážeme, jak je možno v některých případech postupovat při řešení uvedeného problému bez použití diferenciálního počtu (bez derivace funkce). Jedná se především o některé funkce, jejichž funkční předpis $y = f(x)$ lze po úpravě získat ve tvaru kvadratické rovnice s neznámou x a s (reálným) parametrem y, a také o samotné kvadratické funkce. Poznamenejme ještě, že při hledání extrémů (popř. lokálních extrémů) mnoha takových funkcí lze často využít (kromě diferenciálního počtu a nebo např. doplnění kvadratického trojčlenu na dvojmoc) také např. základní algebraické nerovnosti, jako je známá A-G nerovnost.

Příklad 5

Určete extrémy (kvadratické) funkce

$$y = 2x^2 - x + 1.$$

Řešení. Danou funkci upravíme do tvaru kvadratické rovnice

$$2x^2 - x + (1 - y) = 0 \tag{8}$$

s neznámou x a reálným parametrem y. Definičním oborem dané funkce je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, a proto pro libovolné y z hledaného oboru hodnot dané funkce existuje (aspoň jedno) $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí (8). Určíme tedy všechna $y \in \mathbb{R}$, pro něž má kvadratická rovnice (8) reálné kořeny, tj. hledáme všechna $y \in \mathbb{R}$, pro něž je diskriminant rovnice (8) nezáporný. Pro diskriminant D rovnice (8) musí proto platit

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - y) = 8y - 7 \geq 0,$$

a tudíž $y \geq 7/8$. Daná kvadratická funkce tedy nabývá svého minima $y = 7/8$ pro $x = 1/4$, jak snadno zjistíme dosazením nalezené nejmenší hodnoty $y = 7/8$ do dané rovnice nebo do rovnice (8). Z nalezeného výsledku je rovněž patrné, že daná funkce není shora omezená, což je ve shodě se známým chováním kvadratické funkce daného typu.

Příklad 6

Určete extrémy funkce

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Řešení. Pro $y \neq 0$, tj. pro $x \neq 0$ upravíme danou funkci do tvaru kvadratické rovnice

$$yx^2 - x + y = 0. \tag{9}$$

Definičním oborem dané funkce je i v tomto případě celá množina reálných čísel. Využitím vlastnosti diskriminantu kvadratické rovnice (9) určíme její obor hodnot. Kvadratická rovnice (9) má diskriminant $D = 1 - 4y^2$, který musí být nezáporný, tj. musí platit $1 - 4y^2 \geq 0$. Pro odpovídající funkční hodnoty y tedy platí $y \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$. Odtud vidíme, že zkoumaná funkce je *omezená*, tj. omezená současně shora i zdola. Její minimální hodnota je $y = -\frac{1}{2}$, kterou, jak snadno zjistíme po dosazení za y do (9), nabývá pro $x = -1$. Její maximální hodnota je $y = \frac{1}{2}$, jíž daná funkce nabývá pro $x = 1$. Vzhledem k tomu, že funkční hodnota $y = 0$ (dosažená v bodě $x = 0$) není extremální hodnotou dané funkce ($-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2}$), je daná úloha vyřešena.

K procvičení uvádíme trojici neřešených úloh (po jedné ke každé z výše uvedených aplikací diskriminantu kvadratické rovnice).

Příklad 7

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

a určete, kdy nastane rovnost.

Příklad 8

Určete všechny dvojice (m, n) celých čísel splňujících rovnici

$$m^2 + n^2 = mn + 3.$$

[Řešení: $(m, n) \in \{(1; -1), (-1; 1), (2; 1), (1, 2), (-2; -1), (-1; -2)\}$.]

Příklad 9

Určete extrémy funkce

$$y = \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

[$y_{\min} = -1 - 2\sqrt{3}/3$ pro $x = 1 - \sqrt{3}$; $y_{\max} = -1 + 2\sqrt{3}/3$ pro $x = 1 + \sqrt{3}$.]

Literatura

[1] *Švrček, J.*: 6. česko-polsko-slovenská MO juniorů. MFI, roč. 26 (2017), č. 4, s. 318–319.