O porovnání mocnin a^b a b^a

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Výuka diferenciálního počtu na gymnáziích vrcholí praktickými ukázkami vyšetřování průběhu konkrétně zadávaných elementárních funkcí. Z časových důvodů přitom žákům neuvádíme motivační situace, které k potřebě zkoumání té či oné funkce vedou. V učebnici [1] sice pár takových praktických ukázek z oblasti geometrie a fyziky nechybí, otázkou však zůstává, kolik z nich v omezeném čase stačíme s žáky probrat. V tomto článku se proto budeme věnovat jedné poměrně málo známé, pojmově dobře přístupné a časově nenáročné ukázce užití diferenciálního počtu v oblasti číselných výpočtů, ukázce, na kterou lze i k našemu předmětu lhostejnější žáky navnadit nabídkou experimentování s kalkulačkami. Ukážeme rovněž, jak lze dané téma pro matematicky zdatnější žáky prodloužit o malou exkurzi do teorie racionálních čísel. Méně zdatným žákům můžeme místo toho alespoň nabídnout zajímavý příklad na počítání s mocninami, který autor článku v žádné sbírce příkladů na úpravy algebraických výrazů snad nikdy neviděl (určitě by si ho zejména v mladším věku zapamatoval). Něco z článku lze uplatnit i při dřívější výuce věnované elementárním, konkrétně mocninným a exponenciálním funkcím.

Slíbený námět je prozrazen již v názvu našeho článku: budeme řešit *jak pro daná kladná reálná čísla a a b v případě $a \neq b$ rozhodnout, která z mocnin a^b nebo b^a je větším číslem.* Ukážeme, že pro některé takové dvojice (a, b) je odpověď snadná (příklad 1), pro jiné dvojice lze uplatnit hlubší větu 1, k jejímuž důkazu budeme – možná poněkud překvapivě – potřebovat právě diferenciální počet. Konečně pro zbývající dvojice (a, b) je porovnání mocniny a^b s mocninou b^a obtížnou otázkou, při níž přes předpoklad $a \neq b$ nelze vyloučit kuriózní rovnost $a^b = b^a$. Té se budeme též v článku zevrubně věnovat a mj. pro ni dokážeme pozoruhodnou větu 2.

Co vše napoví kalkulačka

Žáky vybavené kalkulačkami s tlačítkem $\boxed{\hat{}}$ můžeme vyzvat, aby se pokusili zjistit nějaké poznatky o srovnání hodnot a^b a b^a cestou různých voleb kladných čísel a a b. Nemusíme k tomu hned dodávat nějaké instrukce, stačí jen poznamenat, proč nás nezajímá ani případ $a = b$, ani případ, kdy jedno z čísel a, b je rovno jedné.

Není vyloučeno, že brzy poté se někdo z žáků vytasí s překvapivou rovností $2^4 = 4^2$. Pokud ne, můžeme třídu k hledání takového příkladu ponouknout. A když už ono dvojí vyjádření čísla 16 napíšeme na tabuli, zeptáme se vzápětí žáků, zda někdo najde jiný příklad téhož ražení. Protože se tak patrně nestane[1)], po chvíli dotyčného ticha vyzveme žáky, aby rovnost $a^b = b^a$ otestovali na kalkulačce pro hodnoty $a = \sqrt{3}$ a $b = 3\sqrt{3}$ – bude to současně i prověrka toho, jak dobře žáci práci s kalkulačkou ovládají i jak je kalkulačka přesná. V některých třídách si pak dovolíme i položit znepokojující otázku, zda shodnost obou na displeji zobrazených výsledků mocnění je skutečným důkazem posuzované rovnosti. Ten pak s žáky snadno provedeme, když obě strany rovnosti upravíme na mocninu čísla 3 s týmž exponentem $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

V druhé fázi numerického experimentování s kalkulačkou nasměrujeme žáky, aby porovnávali hodnoty mocnin a^b a b^a pro dvojice kladných čísel a, b s malou (kladnou) odchylkou $|a - b|$. Nejdříve je přitom vyzveme k ověření nerovností

$$\begin{aligned} 2{,}1^2 &> 2^{2{,}1} \quad (4{,}41 > 4{,}287\ldots), \\ 3{,}1^3 &< 3^{3{,}1} \quad (29{,}791 < 30{,}135\ldots), \end{aligned}$$

které ukazují, že čísla 2 a 3 patří, obrazně řečeno, do dvou různých táborů čísel, protože mají v daném ohledu protichůdné vlastnosti. Žáci mohou dále otestovat, že do tábora čísla 2 patří všechna (kladná) čísla menší než 2 a že do tábora čísla 3 patří všechna čísla větší než 3. Pak můžeme vystupňovat napětí ve třídě otázkou, kdo najde co největší číslo z prvního tábora (patří tam například číslo 2,6) a co nejmenší číslo z druhého tábora (s číslem kupříkladu 2,8). Třeba se pak někdo z žactva přihlásí s domněnkou, že oba tábory na číselné ose odděluje proslulé číslo e, které známe jako *základ přirozených logaritmů*. Budeme tak s žáky motivováni k „intervalovému“ vymezení obou táborů danému níže ve větě 1, která dotyčnou hypotézu v obecnější podobě potvrzuje a kterou užitím derivací snadno dokážeme. Ve třídách, kde diferenciální počet neprobíráme, můžeme žákům větu 1 pouze prozradit, ilustrovat její obsah dalšími numerickými ukázkami a obecně vyřešit alespoň následující příklad.

[1)] Jak se dále ukáže, není toto negativní konstatování projevem autorova pedagogického pesimismu. Při psaní článku ho naopak provázela opačná duševní vlastnost, jak je snad místy z textu patrné. Autor dokonce věří, že si ho přečtou nejen recenzenti.

Příklad 1

Je-li $0 < a < 1 < b$, je z čísel a^b, b^a větší to druhé. Dokažte.

Řešení. Exponenciální funkce $y = r^x$ s daným základem r je v proměnné x jak známo klesající, resp. rostoucí, je-li $0 < r < 1$, resp. $r > 1$. Odtud dvojím užitím (pro $r = a$ a pro $r = b$) za předpokladu $0 < a < 1 < b$ dostaneme potřebné:

$$b^a > b^0 = 1 > a = a^1 > a^b.$$

Věta 1

Pro libovolná kladná reálná čísla a, b v případě $a < b \le \mathrm{e}$ platí $b^a > a^b$, zatímco v případě $\mathrm{e} \le a < b$ platí naopak $a^b > b^a$.

Důkaz. Jak účinně vystihnout, kdy pro kladná čísla a, b platí nerovnost $a^b > b^a$? Jejím logaritmováním a následným vydělením součinem ab dostaneme ekvivalence

$$a^b > b^a \iff b \ln a > a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}.$$

S ohledem na symetrii řešené otázky v číslech a, b vidíme, že porovnání hodnot a^b, b^a dopadne *vždy stejně* jako porovnání hodnot $f(a)$, $f(b)$ (v tomto pořadí) pro funkci f definovanou na množině všech kladných čísel předpisem

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Tvrzení dokazované věty tak lze zapsat implikacemi

$$0 < a < b \le \mathrm{e} \Rightarrow f(a) < f(b) \quad \text{a} \quad \mathrm{e} \le a < b \Rightarrow f(a) > f(b),$$

které vyjadřují právě to, že funkce f je rostoucí na intervalu $(0, \mathrm{e}\rangle$ a klesající na intervalu $\langle \mathrm{e}, \infty)$. To můžeme (podle známé poučky z diferenciálního počtu) ověřit výpočtem její derivace a určením intervalů, kde je tato derivace kladná, resp. záporná:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

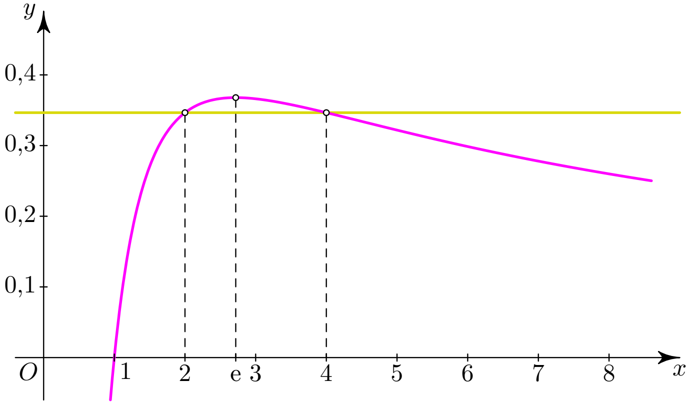
$$f'(x) > 0 \iff \ln x < 1 \iff x \in (0, \mathrm{e}),$$

$$f'(x) < 0 \iff \ln x > 1 \iff x \in (\mathrm{e}, \infty).$$

Tím je celý důkaz hotov.[2)] Graf funkce f, kterou jsme při něm využili, je vykreslen na obr. 1, a to společně s přímkou o rovnici $y = c$, kde konstanta c je společná hodnota funkce f v bodech $x = 2$ a $x = 4$. Skutečně,

$$f(2) = \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}\ln 4 = f(4),$$

což odpovídá také dříve uvedené rovnosti $2^4 = 4^2$.



Obr. 1

Případ rovnosti $a^b = b^a$

Podle příkladu 1 a postupu z důkazu věty 1 je zřejmé, že porovnání mocnin a^b a b^a je problematické v situaci, kdy obě čísla a, b jsou větší než 1 a přitom „odděleny“ číslem e, tedy $1 < a < \mathrm{e} < b$ bez újmy na obecnosti. Graf funkce f to dobře dokládá, navíc umožňuje graficky určovat dvojice čísel (a, b) splňující podmínky

$$a^b = b^a, \quad \text{kde } a \in (1, \mathrm{e}) \text{ a } b \in (\mathrm{e}, \infty),$$

a to s mírou přesnosti odpovídající kvalitě jeho vykreslení. Dokonce je očividné (a Bolzanovou větou o mezihodnotách spojité funkce exaktně zaručené), že pro každé $a \in (1, \mathrm{e})$ existuje taková dvojice (a, b) s (jediným) vhodným $b \in (\mathrm{e}, \infty)$. Bylo by jistě žádoucí mít pro dotyčné dvojice (a, b)

[2)] Fakt, že intervaly monotonie $(0, \mathrm{e})$ a (e, ∞) můžeme rozšířit na intervaly $(0, \mathrm{e}\rangle$ a $\langle \mathrm{e}, \infty)$, je důsledkem spojitosti funkce f (v bodě e).

analytické vzorce! Ano, takové vzorce existují a uvedeme je teď v zadání úkolu, který může nezasvěceného vykonavatele v případě úspěšného dopočtu docela mile překvapit.

Příklad 2

Vypočtěte rozdíl $a^b - b^a$ pro hodnoty a, b určené vzorci

$$a = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \quad \text{a} \quad b = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r+1}, \tag{V}$$

kde $r > 0$ je dané číslo.

Řešení. Hledaný rozdíl je roven *nule* pro každé $r > 0$, neboť obě mocniny a^b a b^a se pro určená a, b rovnají:

$$a^b = \left[\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r\right]^{(1+\frac{1}{r})^{r+1}} = \left(\frac{r+1}{r}\right)^{r\cdot[\frac{(r+1)}{r}]^{r+1}} =$$

$$= \left(\frac{r+1}{r}\right)^{\frac{(r+1)^{r+1}}{r^r}} = \left(\frac{r+1}{r}\right)^{(r+1)a} = \left[\left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r+1}\right]^a = b^a.$$

K příkladu 2 dodejme, že volbou $r = 1/2$ ve vzorcích (V) dostaneme dvojici čísel $a = \sqrt{3}$ a $b = 3\sqrt{3}$, se kterou jsme se seznámili už dříve. To však nijak nesnižuje údiv nad možností, že někdo mohl dotyčné vzorce pro dvojice čísel (a, b) s vlastností $a^b = b^a$ jen tak uhodnout. Poodhalíme roušku oné záhady krátkou úvahou, která nás dokonce přivede k odvození vzorců (V) pro *každé* řešení rovnice $a^b = b^a$ v oboru kladných reálných čísel a a b, pro něž navíc platí $a < b$.

Díky poslední nerovnosti máme $b = ka$ pro vhodné (reálné) číslo $k > 1$. Dosadíme-li to do rovnice $a^b = b^a$, dostaneme

$$a^{ka} = (ka)^a,$$

odkud po umocnění obou stran číslem $1/a$ obdržíme

$$a^k = ka \quad \text{neboli} \quad a^{k-1} = k,$$

takže po dalším umocnění, tentokrát číslem $1/(k-1)$, dojdeme k vyjádřením

$$a = k^{\frac{1}{k-1}} \quad \text{a} \quad b = ka = k^{1+\frac{1}{k-1}}.$$

Přejdeme-li od parametru $k > 1$ k novému parametru $r = 1/(k-1) > 0$, s ohledem na zpětný vztah $k = 1 + \frac{1}{r}$ již zřejmě obdržíme vzorce (V).

Poté, co jsme objasnili původ vzorců (V), obraťme naši pozornost na atraktivní úkol, kterým je řešení rovnice $a^b = b^a$ v oboru kladných *racionálních* čísel a a b.[3)] Protože nás nezajímají triviální řešení $a = b$, můžeme díky symetrii opět předpokládat, že platí $a < b$. Stojíme tak podle předchozího výkladu vlastně před otázkou, pro která kladná reálná čísla r určují vzorce (V) dvě racionální čísla a a b.

Mezi hledaná čísla r zřejmě patří všechna přirozená čísla, kterým odpovídají dvojice (a, b) tvaru

$$(2,4),\ \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right),\ \left(\frac{64}{27}, \frac{256}{81}\right),\ \ldots$$

(vyčíslili jsme je pouze pro $r = 1, 2, 3$). Že pro jiné hodnoty r již žádnou dvojici racionálních čísel nedostaneme, je netriviální poznatek, který nyní uvedeme i s úplným důkazem.

Věta 2

Nechť pro kladná racionální čísla a a b platí $a^b = b^a$, přičemž $a < b$. Pak existuje přirozené číslo n takové, že čísla a a b mají vyjádření

$$a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{a} \quad b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Důkaz. Popíšeme postup z článku [2]. Podle něho předpokládanou rovnost $a^b = b^a$ nejprve upravíme na

$$b = a^{\frac{b}{a}},$$

odkud po vydělení číslem a dostaneme

$$\frac{b}{a} = a^{\frac{b}{a} - 1}.$$

Díky předpokladu $a < b$ je exponent mocniny na pravé straně rovnosti *kladné* racionální číslo, které nyní zapíšeme zlomkem v základním tvaru:

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{m}{n},$$

[3)] V oboru *přirozených* čísel má tato rovnice za podmínky $a < b$ jediné řešení $(a, b) = (2, 4)$, jak plyne z věty 1, podle které pak totiž musí být $a \in (1, \mathrm{e})$, tj. nutně $a = 2$.

kde m a n jsou dvě nesoudělná přirozená čísla. Dosazením do obou stran dotyčné rovnosti tak dostaneme

$$\frac{m}{n} + 1 = a^{\frac{m}{n}},$$

neboli

$$\frac{m+n}{n} = a^{\frac{m}{n}}$$

odkud po umocnění obou stran na n-tou dostaneme

$$\frac{(m+n)^n}{n^n} = a^m. \tag{$*$}$$

S rovností $(*)$ spojíme klíčovou úvahu: zapíšeme-li racionální číslo a^m zlomkem v základním tvaru a poté jeho čitatel i jmenovatel rozložíme na prvočinitele, bude každé prvočíslo p, přítomné ať už v čitateli či jmenovateli, vystupovat v mocnině, která má exponent dělitelný číslem m – bude totiž m-násobkem příslušného exponentu mocniny prvočísla p v čitateli, resp. jmenovateli toho zlomku v základním tvaru, který je roven číslu a. Odtud s ohledem na to, že čísla $m+n$, n jsou stejně jako čísla m, n nesoudělná, z odvozené rovnosti $(*)$ plyne, že také obě mocniny $(m+n)^n$ a n^n mají ve svých rozkladech všechna prvočísla zastoupená s exponenty dělitelnými číslem m. Protože však tyto exponenty jsou zřejmě i dělitelné číslem n, jsou dokonce dělitelné součinem mn (opět díky nesoudělitelnosti m a n). Proto existují přirozená čísla u a v taková, že

$$(m+n)^n = u^{mn} \quad \text{a} \quad n^n = v^{mn},$$

odkud po odmocnění plyne

$$m+n = u^m \quad \text{a} \quad n = v^m.$$

Rozdíl $u^m - v^m$ je tak roven číslu m, což je možné, jak vzápětí ukážeme, jedině v případě, kdy exponent m odečítaných mocnin je roven 1. Skutečně, v případě $m \geq 2$ bychom totiž podle binomické věty dostali

$$m = u^m - v^m \geq (v+1)^m - v^m > \binom{m}{1} v^{m-1} \geq m,$$

a tedy $m > m$, což je potřebný spor.

Dosazením $m = 1$ do $(*)$ dostaneme již přímo dokazované vyjádření pro číslo a, pro číslo b pak stačí dosadit určené a do rovnosti

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{m}{n} = \frac{1}{n},$$

kterou jsme čísla m a n zavedli. Důkaz je hotov.

Na úplný závěr dodejme, že čísla z dokázané věty 2 tvoří posloupnosti

$$P = \left(\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

a

$$Q = \left(\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty},$$

které jsou známé tím, že v klasických kurzech matematické analýzy jsou využívány k samotné definici čísla e. Tak je tomu např. na str. 96–98 dnes již legendární učebnice [2] sepsané Vojtěchem Jarníkem. Tam je také podán elementární algebraický důkaz toho, že posloupnost P je rostoucí, posloupnost Q klesající a že obě mají stejnou limitu. Právě ta je pak prohlášena za číslo e a slouží později k odvození vlastnosti očekávané od základu přirozených logaritmů, kterou je rovnost

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Literatura

[1] *Hrubý, D., – Kubát, J.*: Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet. 2. vyd., Prometheus, Praha, 1997.

[2] *Jarník, V.*: Diferenciální počet I. 6. vyd., Academia, Praha, 1974, URL: `http://dml.cz/dmlcz/401985`

[3] *Sved, M.*: On the Rational Solutions of $x^y = y^x$. Mathematics Magazine, roč. 63 (1990), č. 1, s. 30–33.