# Variace na téma lichoběžník a jeho obsah

*JANA HROMADOVÁ – ZDENĚK HALAS – VLASTA MORAVCOVÁ – JARMILA ROBOVÁ*

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cílem článku je na konkrétním případě ukázat jeden z konstruktivistických přístupů, jímž lze ve školské matematice zavádět pojmy. Při poznávání cest, jak si děti budují nové pojmy, je užitečné podívat se na vznik pojmů v historickém vývoji člověka a jejich budování v matematice jako vědecké disciplíně.

Zamysleme se nejprve nad původem matematických pojmů. Ty zpočátku vznikaly převážně z popudu praxe. Představme si úrodné údolí řeky Nil, kde bylo po každoročních záplavách potřeba znovu a znovu vyměřovat pole, evidovat úrodu a stanovovat daně. Z potřeby řešení takovýchto konkrétních problémů se vytvářely první geometrické pojmy.

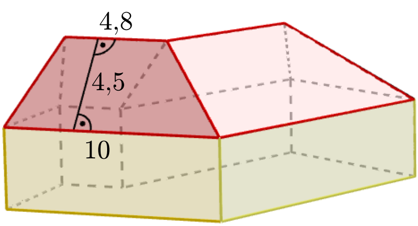
Při transformaci pojmů do školské matematiky je vhodné vycházet z historie, musíme však dbát na to, aby transformace byla přiměřená věku žáků a jejich schopnostem. Při zavádění pojmu se snažíme vycházet z reálné praxe. Postupně se pokoušíme žáky dovést k tomu, aby si vlastní aktivní činností nový pojem osvojili. Opíráme se při tom o již nabyté znalosti a zkušenosti žáků z předchozí výuky či ze života. Ukážeme si vše na konkrétním příkladu pojmu lichoběžník a jeho využití v praxi.

S pojmem lichoběžník se žáci obvykle setkávají poprvé v 7. ročníku základní školy (viz učebnice [1, 2]), respektive v sekundě na nižších stupních gymnázií (viz [3]). Lze předpokládat, že již dobře znají pojmy trojúhelník, čtyřúhelník, čtverec či obdélník, můžeme se tedy o tyto pojmy opřít a navázat na ně. V některých učebnicích je před lichoběžníkem probírán i rovnoběžník ([1, 2]), jinde je tomu naopak ([3]). Ve všech třech je pojem uveden definicí, v [1] a [2] jsou pak pomocí návodných otázek a úkolů postupně odvozeny základní vlastnosti lichoběžníků. Učebnice [3] je spíše výkladová, nevybízí přímo k samostatné činnosti žáka. V učebnicích nebývá příliš prostor pro motivační úlohy z reálné praxe. Předvedeme dále úlohu, kterou bychom mohli využít při prvním seznámení s lichoběžníkem. Vzhledem k tomu, že se jedná o úlohu z praxe, bude naším cílem i určení obsahu lichoběžníku.

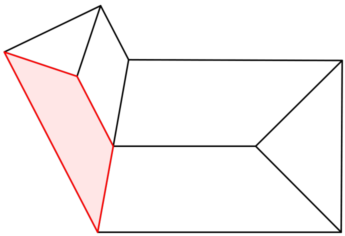
## Zadání motivační úlohy

*Část střechy rodinného domku je porostlá mechem (obr. 1). Pod mechem se dlouhodobě udržuje vlhkost a střešní krytina tím ztrácí kvalitu. Majitel domu proto zakoupil roztok sloužící k odstranění mechů. Výrobce udává spotřebu 1/4 litru roztoku na 1 m*$^2$*. Cena za litr roztoku je 63 Kč. Rozměry poškozené části střechy v metrech jsou znázorněny v obrázku (obr. 2), pro názornost je přiložen i půdorys domku (obr. 3). Jsme schopni ze zadaných údajů spočítat cenu roztoku potřebného k očištění dané části střechy?*

Obr. 1



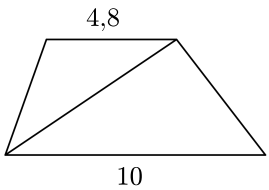

Obr. 2



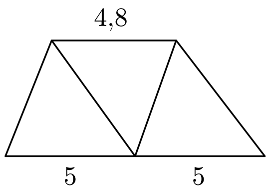
Obr. 3

Cílem této motivační úlohy je úvodní seznámení s pojmem lichoběžník a hledání vlastností a souvislostí s již žákům známými geometrickými útvary. Žáci by si měli všimnout, že zkoumaná část střechy má tvar čtyřúhelníku, který má dvě protější strany navzájem rovnoběžné a zbylé dvě různoběžné. Z fotografie (obr. 1) a přiloženého půdorysu (obr. 3) můžeme odhadnout, že různoběžné strany nejsou stejně dlouhé.

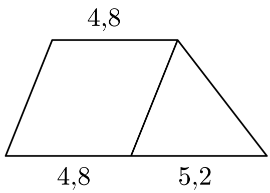
K určení ceny roztoku potřebného k vyčištění střechy potřebujeme znát obsah poškozené části střechy. Dokážeme vypočítat obsah neznámého čtyřúhelníku? Můžeme navést žáky k tomu, aby využili svých znalostí a rozložili zkoumaný čtyřúhelník na části, jejichž obsah spočítat umí. Žáky lze rozdělit do skupin a výpočet obsahu pojmout jako soutěž, na jejímž závěru si porovnáme výsledky. Pravděpodobně se sejdou různé návrhy, některé z nich jsou zobrazeny na následujících pěti obrázcích (obr. 4 až obr. 8):




Obr. 4




Obr. 5




Obr. 6

Na obr. 4 je čtyřúhelník rozdělen na dva trojúhelníky, jejichž základny mají délky 10 m a 4,8 m, oba trojúhelníky mají stejnou výšku 4,5 m. Pro obsah celého čtyřúhelníku platí

$$S = \left( \frac{10 \cdot 4{,}5}{2} + \frac{4{,}8 \cdot 4{,}5}{2} \right) \text{ m}^2 = 33{,}3 \text{ m}^2.$$

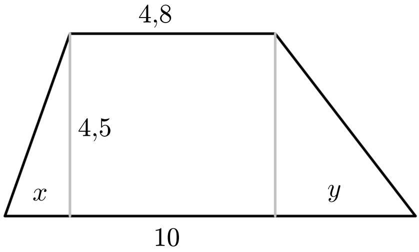
Na obr. 5 je čtyřúhelník rozdělen na tři trojúhelníky se společným vrcholem ve středu nejdelší strany. Tento způsob je sice složitější než předchozí varianta, ale lze předpokládat, že jej některý žák použije. Opět mají všechny trojúhelníky stejnou výšku, pro obsah tedy platí

$$S = \left( 2 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}5}{2} + \frac{4{,}8 \cdot 4{,}5}{2} \right) \text{ m}^2 = 33{,}3 \text{ m}^2.$$

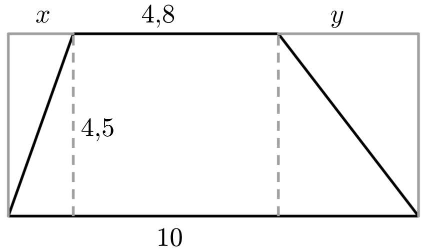
Analogicky bychom postupovali, kdyby společný vrchol byl libovolným jiným bodem nejdelší strany či strany s ní rovnoběžné.

Na obr. 6 jsme použili rovnoběžník a trojúhelník. Strana rovnoběžníku má délku 4,8 m, příslušná výška je 4,5 m. Výška trojúhelníku je stejná, odpovídající základna má délku (10 − 4,8) m = 5,2 m.

$$S = \left(4{,}8 \cdot 4{,}5 + \frac{5{,}2 \cdot 4{,}5}{2}\right)\ \mathrm{m}^2 = 33{,}3\ \mathrm{m}^2.$$



Obr. 7



Obr. 8

Možná se najdou i žáci, kteří čtyřúhelník pomocí dvou svislých čar rozdělí na obdélník o stranách délky 4,8 m a 4,5 m a dva trojúhelníky o výšce 4,5 m (obr. 7), jejichž základny $x$, $y$ sice neznáme, ale víme, že dohromady tvoří jeden trojúhelník o základně $x+y = (10-4{,}8)$ m = 5,2 m.

$$S = \left(4{,}8 \cdot 4{,}5 + \frac{5{,}2 \cdot 4{,}5}{2}\right)\ \mathrm{m}^2 = 33{,}3\ \mathrm{m}^2.$$

Není náhodou, že zápis výpočtu obsahu $S$ k obrázkům obr. 6 a obr. 7 je stejný. Ukazuje se zde vazba mezi obsahem obdélníku a obsahem rovnoběžníku.[1)]

Na obr. 8 je čtyřúhelník doplněn na obdélník o stranách délky 10 m a 4,5 m, od jehož obsahu odečteme obsahy trojúhelníků o základnách $x$, $y$ a výšce 4,5 m.

$$S = \left(10 \cdot 4{,}5 - \frac{5{,}2 \cdot 4{,}5}{2}\right)\ \mathrm{m}^2 = 33{,}3\ \mathrm{m}^2.$$

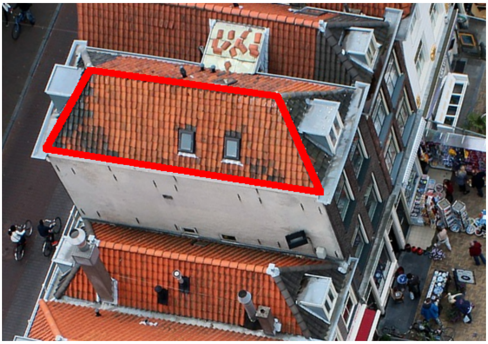
Při všech způsobech rozdělení vidíme, že velmi podstatná je znalost vzdálenosti dvou rovnoběžných stran čtyřúhelníku. Tato vzdálenost je společnou výškou všech výše zkoumaných útvarů. Pokud tuto informaci máme, jsme schopni úlohu vyřešit, a tedy kladně odpovědět na otázku z motivačního příkladu.

---

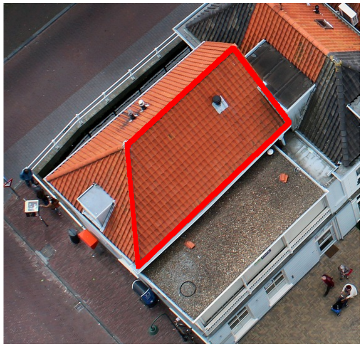
[1)] Přesunutím vhodného trojúhelníku transformujeme rovnoběžník na obdélník o stejném obsahu (viz [1, str. 55], [3, str. 98]).

*Litrové balení roztoku vystačí na ošetření 4 m$^2$ střechy. Na ošetření plochy 33,3 m$^2$ potřebujeme $\frac{33{,}3}{4}$ l $\doteq$ 8,325 litru roztoku. Musíme tedy zakoupit 9 litrových balení v celkové ceně 567 Kč.*

V motivační úloze jsme žákům předložili ke zkoumání jeden typ lichoběžníku. Chceme-li, aby si žáci pojem lichoběžník správně osvojili, je třeba jim předkládat i další ukázky. Na obr. 9 a 10 si všimněme červeně zvýrazněných částí střech domů.



Obr. 9



Obr. 10

Můžeme se žáky diskutovat, co mají všechny čtyřúhelníky použité k zastřešení domů společného. Zda, případně jak, se liší od již známých útvarů – čtverce, obdélníku či rovnoběžníku.

Dojdeme k závěru, že se jedná o čtyřúhelníky, které mají dvě protilehlé strany navzájem rovnoběžné, zbývající dvě strany jsou různoběžné. Můžeme si všimnout, že na obr. 9 jsou různoběžné strany čtyřúhelníku stejně dlouhé, zatímco v motivační úloze (obr. 1) měly různou délku. Podobně je tomu na obr. 10, kde je navíc jedna strana čtyřúhelníku kolmá k dvojici rovnoběžných stran. Tyto závěry ovšem nemusí být z předložených fotografií na první pohled patrné, vhodnější by bylo připravit si modely takových střech, ať již fyzické nebo alespoň virtuální za pomoci grafického softwaru.

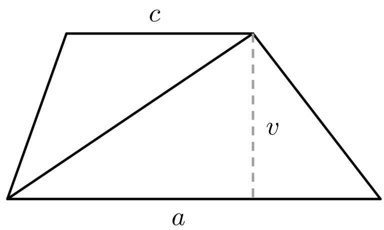
Nyní již můžeme přejít k definici lichoběžníku a pojmenování jeho základních prvků.

***Lichoběžník*** *je čtyřúhelník, který má jen jednu dvojici rovnoběžných protilehlých stran.*

Jak vlastně vznikl název lichoběžník? Původ slova *lichý* vychází z indoevropského základu *leiku* ve smyslu *přebývat, zbývat*. Samotné slovo *lichý* znamenalo *nepárový, přebytečný*, v pozdějším významu *odchylný*. Tento význam se pak objevuje v názvu *lichoběžníku*, který je tedy útvarem odchylným od rovnoběžníku. Viz např. [4, 5].

V některých starších učebnicích, např. [6], se můžeme též setkat s jiným vysvětlením původu pojmu – lichoběžník má svůj název podle toho, že je to čtyřúhelník, který má lichý počet párů rovnoběžných stran.

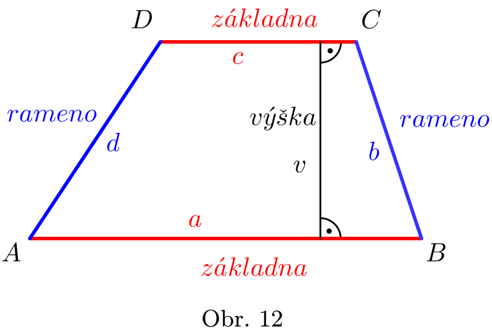
Vrátíme-li se k rozdělení lichoběžníku na části z motivační úlohy (obr. 11), můžeme s žáky snadno odvodit vzorec pro obsah lichoběžníku.




Obr. 11

$$S = \frac{a \cdot v}{2} + \frac{c \cdot v}{2} = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

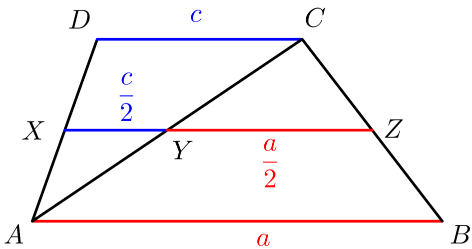
V uvedeném vzorci se vyskytují údaje $a$, $c$; stranám $a$, $c$ budeme říkat *základny*. Ty jsou rovnoběžné, a má tedy smysl hovořit o vzdálenosti přímek, na nichž základny leží, budeme ji nazývat výškou[2)] a značit $v$. Pro označení zbývajících dvou stran budeme používat pojem *ramena*.




Obr. 12

[2)] Pojem výšky je u lichoběžníku definován jako vzdálenost přímek, na nichž leží základny, ale někdy ji také chápeme jako příslušnou úsečku, kolmou k základnám (viz obr. 11, obr. 12).

Vrátíme-li se ke vztahu pro obsah ve tvaru $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$, můžeme zkoumat geometrický význam úsečky o délce $\frac{a+c}{2}$. Rozdělme lichoběžník $ABCD$ (obr. 13) na trojúhelníky $ABC$, $CDA$ a vyznačme v nich střední příčky $XY$, $YZ$ rovnoběžné se základnami $AB$ a $CD$. Z vlastností středních příček v trojúhelníku známe jejich délky $\frac{a}{2}$, $\frac{c}{2}$. Je zřejmé, že tyto příčky leží na jedné přímce,[3)] z čehož vyplývá, že úsečka $XZ$ je rovnoběžná se základnami a má délku $\frac{a+c}{2}$. Tuto úsečku (případně její délku) nazýváme *střední příčka* lichoběžníku.

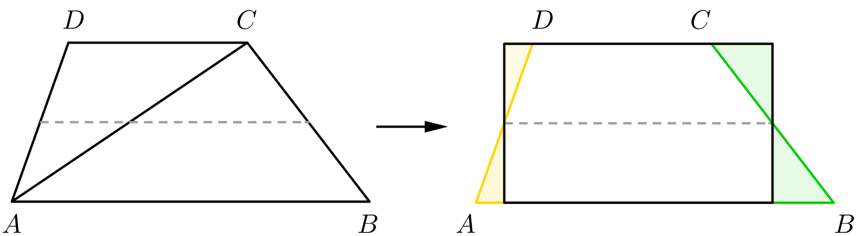



Obr. 13

Označíme-li délku střední příčky $s$, můžeme vztah pro obsah lichoběžníku zapsat ve tvaru

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = s \cdot v.$$

Nyní se lze ptát na geometrický význam výrazu $s \cdot v$. Žáci by mohli přijít na to, že obsah lichoběžníku odpovídá obsahu obdélníku o stranách $s$ a $v$ (obr. 14).




Obr. 14

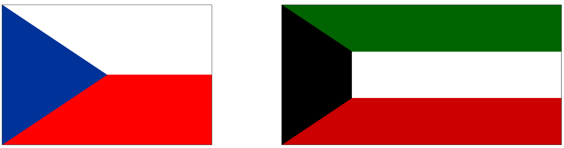
Dále je vhodné se žáky diskutovat, kde se s lichoběžníkem setkáváme v reálném životě. Takových příkladů je celá řada: okénka u auta (obr. 15),

3) Obě procházejí středem $Y$ úsečky $AC$ a tímto bodem lze vést jedinou rovnoběžku se základnami (plyne z pátého Eukleidova postulátu).

okna budovy (obr. 16), vlajky (obr. 17), dlažba na chodníku, lichoběžníkový závit šroubu atd. Několik jich můžeme žákům ukázat a necháme na nich, aby do příští vyučovací hodiny dohledali další příklady, popřípadě přinesli obrázky zachycující využití lichoběžníků v praxi.

Obr. 15

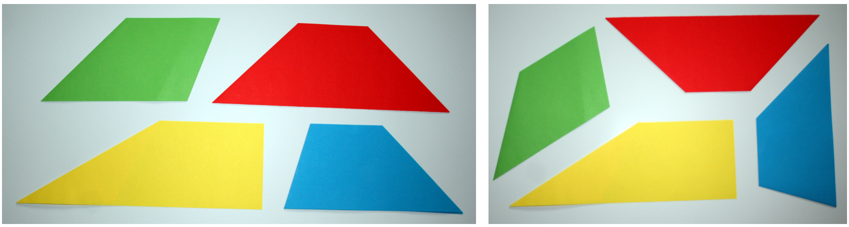

Obr. 16



Obr. 17

Významnou roli při objevování nových poznatků a souvislostí mezi nimi hrají didaktické pomůcky, s nimiž žáci manipulují. Je známo, že přijímáme-li nové poznatky nejen vizuálně či verbálně, ale též hmatem (hapticky), dochází k propojení více center v mozku, a tím i k lepšímu zapamatování poznatků (viz např. [7, str. 152–153]).

Do výuky můžeme zařadit následující aktivitu. Rozdáme žákům papír formátu A4, popřípadě jej ještě rozdělíme podélně na dvě poloviny, abychom získali užší pruh papíru. Úkolem žáků bude ohýbáním papíru vytvořit lichoběžníky různých tvarů. Ty pak připneme na magnetickou tabuli či na nástěnku a společně diskutujeme, zda se skutečně jedná o lichoběžníky a zda některé z nich mají společné vlastnosti. Po žácích chceme, aby u každého lichoběžníku určili základny a ramena, popř. vyznačili výšky a střední příčky. Pokud žádný žák nevytvoří „nelichoběžník“, použijeme předem připravený čtyřúhelník, který není lichoběžníkem, abychom žákům ukázali i protipříklad[4]. Postupně tak můžeme dojít k pojmům *rovnoramenný* a *pravoúhlý lichoběžník*. Několik různých lichoběžníků si pak žáci překreslí do sešitu. Dbáme na to, aby nekreslili všechny lichoběžníky se základnami ve vodorovném směru, aby nebyla vždy delší základna „dole“ a aby se mezi nimi objevily oba výše uvedené speciální typy (obr. 18 vpravo). Cílem je, aby si nezafixovali pojem lichoběžník jen pro speciální případy či polohy (obr. 18 vlevo).



Obr. 18

Téma lichoběžníku jsme v článku zdaleka nevyčerpali. Jistě by nás napadla řada dalších způsobů odvození vzorců pro obsah lichoběžníku či délku střední příčky, k nimž by žáci mohli dospět vlastní činností. V rozporu s humornou pedagogickou zásadou č. 28 Emila Caldy[5] není naším cílem sdělit žákům vše, co víme. Naopak, chceme jim nechat prostor k osvojení pojmu vlastní aktivní činností, aby základy, které budujeme, byly dostatečně pevné. Postup popsaný v článku lze aplikovat i na další geometrické pojmy.

[4] Zajímavé je, že například v anglických učebnicích je lichoběžník definován jako čtyřúhelník, který má minimálně jeden pár rovnoběžných stran, tedy mezi lichoběžníky patří i rovnoběžník, potažmo obdélník, či čtverec. Při této definici bychom s protipříklady museli být opatrní a volit takový čtyřúhelník, který nemá žádné rovnoběžné strany. Za povšimnutí stojí i to, že strany, které nazýváme rameny, se v anglosaské literatuře nazývají legs, tj. „nohy“ lichoběžníku.

[5] *Umíme-li daný příklad vyřešit více způsoby, ukážeme je. Jedním způsobem je žák deprimován pouze jednou.* ([8], str. 20).

Literatura

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika 3 pro 7. ročník základní školy. Prometheus, Praha 2012.

[2] *Šarounová, A. a kol.*: Matematika 7, II. díl pro ZŠ. Prometheus, Praha, 1998.

[3] *Herman, J. a kol.*: Trojúhelníky a čtyřúhelníky – Matematika – Sekunda. Prometheus, Praha, 2010.

[4] *Holub, J. – Lyer, S.*: Stručný etymologický slovník jazyka českého. SPN, Praha, 1978.

[5] *Machek, V.*: Etymologický slovník jazyka českého. NLN, Praha, 1997.

[6] *Schubert, E.*: Methodika měřického tvaroznalství. Nakladatel Alois Šašek, Velké Meziříčí, 1894.

[7] *Spitzer, M.*: Digitální demence. Host, Brno, 2016.

[8] *Calda, E.*: Pedagogické zásady a termíny ve výuce M & F. Prometheus, Praha, 2003.

# Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 237 a 238 můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2018 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu *mfi@upol.cz*.

**Úloha 239**

Označme $M$ střed základny $AB$ rovnoramenného trojúhelníku $ABC$ a $F$ patu kolmice z bodu $M$ na stranu $BC$. Přímka $\ell$ je kolmá k $AF$ a prochází bodem $C$. Dokažte, že přímka $\ell$ prochází středem úsečky $MF$.

*Robert Geretschläger* (*Graz*)

**Úloha 240**

Petr vyložil na stůl 2017 karet popsaných čísly $1, 2, \dots, 2017$. Na líci každé karty je napsáno právě jedno přirozené číslo, rub je prázdný a karty jsou otočeny rubem nahoru. Poté s kartami provedl následujících 2017 kroků. V $k$-tém kroku otočil (zaměnil rub a líc) každou kartu označenou číslem dělitelným $k$. (V prvním kroku otočil všechny karty lícem nahoru,