Literatura

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika 3 pro 7. ročník základní školy. Prometheus, Praha 2012.

[2] *Šarounová, A. a kol.*: Matematika 7, II. díl pro ZŠ. Prometheus, Praha, 1998.

[3] *Herman, J. a kol.*: Trojúhelníky a čtyřúhelníky – Matematika – Sekunda. Prometheus, Praha, 2010.

[4] *Holub, J. – Lyer, S.*: Stručný etymologický slovník jazyka českého. SPN, Praha, 1978.

[5] *Machek, V.*: Etymologický slovník jazyka českého. NLN, Praha, 1997.

[6] *Schubert, E.*: Methodika měřického tvaroznalství. Nakladatel Alois Šašek, Velké Meziříčí, 1894.

[7] *Spitzer, M.*: Digitální demence. Host, Brno, 2016.

[8] *Calda, E.*: Pedagogické zásady a termíny ve výuce M & F. Prometheus, Praha, 2003.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 237 a 238 můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2018 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu *mfi@upol.cz*.

Úloha 239

Označme M střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC a F patu kolmice z bodu M na stranu BC. Přímka ℓ je kolmá k AF a prochází bodem C. Dokažte, že přímka ℓ prochází středem úsečky MF.

Robert Geretschläger (*Graz*)

Úloha 240

Petr vyložil na stůl 2017 karet popsaných čísly $1, 2, \ldots, 2017$. Na líci každé karty je napsáno právě jedno přirozené číslo, rub je prázdný a karty jsou otočeny rubem nahoru. Poté s kartami provedl následujících 2017 kroků. V k-tém kroku otočil (zaměnil rub a líc) každou kartu označenou číslem dělitelným k. (V prvním kroku otočil všechny karty lícem nahoru, poté otočil rubem nahoru všechny karty popsané sudými čísly, atd.) Určete součet čísel na kartičkách obrácených lícem nahoru po těchto 2017 krocích.

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 235 a 236, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 235

Na jednotkové kružnici se středem S je dána konečná množina oblouků délek menších než π, přitom součet délek všech oblouků je větší než 2π. Dokažte, že existuje přímka procházející bodem S, která protíná aspoň tři z těchto oblouků. *Jacek Uryga (Katowice)*

Řešení. Označme O danou množinu oblouků. Délka každého oblouku o z množiny O je menší než π, proto tento oblouk nemá žádný společný bod s obloukem o', který je souměrně sdružený s obloukem o podle podle bodu S. Označme O' množinu všech souměrně sdružených oblouků s oblouky množiny O.

Podle zadání je součet délek všech oblouků množiny $O \cup O'$ větší než 4π. Pokud by každý bod dané jednotkové kružnice s obvodem 2π patřil nejvýše dvěma obloukům množiny $O \cup O'$, součet délek všech oblouků této množiny by byl menší než 4π, což je spor. Proto existuje alespoň jeden bod A dané jednotkové kružnice, který patří alespoň třem obloukům množiny $O \cup O'$. Některé z nich jsou z O, jiné z O'.

Uvažujme nyní přímku AS. Pokud bod A patří oblouku $o \in O$, protíná přímka AS oblouk o v bodě A. Přímka AS dále prochází bodem A' souměrně sdruženým s bodem A podle S. Pokud bod A patří oblouku $b' \in O'$, protíná přímka AS v bodě A' oblouk $b \in O$, který je vzorem oblouku b' v souměrnosti se středem S. Podle tvrzení prvního odstavce není bod A bodem oblouku b. Existují tak tři různé oblouky z množiny O, kterými prochází přímka AS, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Denisa Chytilová* a *Jana Pallová*, obě z GJŠ v Přerově, *Vít Jelínek*, *Josef Minařík*, *Tomáš Perutka*, *Štěpán Šmíd*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Vojtěch Lengál* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Jiří Nábělek* a *Bára Tížková*, oba z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vojtěch Lanz* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Vít Pískovský* z GOH v Ostravě-Porubě, *Martin*

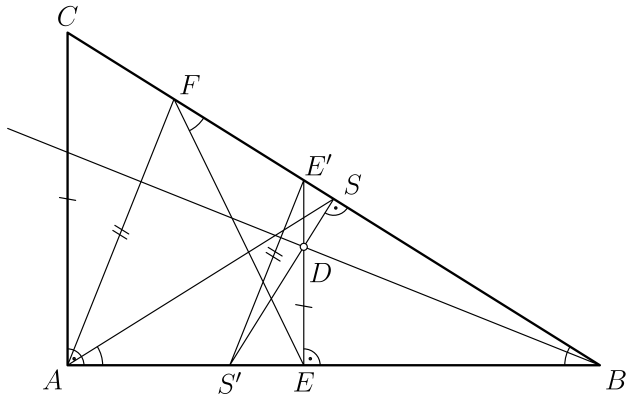
Raška a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě a *Václav Steinhouser* z G v Dačicích.

Úloha 236

Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou BC je dán bod D tak, že $|DB| = |DC|$. Pro vnitřní bod E odvěsny AB platí $DE \parallel AC$. Pro vnitřní bod F přepony BC platí $|EB| = |EF|$. Dokažte, že přímka AF je kolmá na přímku BD. *Patrik Bak*

Řešení. Označme S střed přepony BC. Z vlastností pravoúhlého trojúhelníku plyne, že $|SA| = |SB|$ a tedy ABS je rovnoramenný trojúhelník. Ze zadání plyne, že FBE je rovnoramenný trojúhelník, který má shodný vnitřní úhel u základny při vrcholu B jako trojúhelník ABS. Tyto dva trojúhelníky jsou tak podobné a platí

$$\frac{|BA|}{|BF|} = \frac{|BS|}{|BE|}. \tag{1}$$



Označme E' průsečík přímky BC s přímkou DE a S' průsečík přímky AB s přímkou DS. Podle zadání jsou oba trojúhelníky BSS' a BEE' pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech S a E. První kolmost plyne z rovnosti $|DB| = |DC|$, tedy SD je osou úsečky BC, druhá kolmost plyne z kolmosti odvěsen pravoúhlého trojúhelníku ABC a rovnoběžnosti odvěsny AC s přímkou DE. Oba trojúhelníky BSS' a BEE' se také shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu B, jsou tedy podobné a platí

$$\frac{|BS|}{|BE|} = \frac{|BS'|}{|BE'|}.$$

Spolu s (1) to znamená, že

$$\frac{|BA|}{|BF|} = \frac{|BS|}{|BE|} = \frac{|BS'|}{|BE'|}.$$

Odtud již vyplývá rovnoběžnost přímek FA a $E'S'$.

Bod D je průsečíkem výšek z vrcholů E', S' trojúhelníku $E'S'B$, přímka BD je tak třetí výškou tohoto trojúhelníku a je kolmá na stranu $E'S'$. Proto je kolmá i na přímku FA, která je s touto stranou rovnoběžná, což jsme měli dokázat.

Poznámka. U tohoto příkladu se objevilo mnoho neúplných řešení. Jejich idea byla velmi podobná. Řešitelé použili větu o obvodovém úhlu. Ukázali, že body E, B, S, D leží na jedné kružnici. Dále chtěli ukázat, že body A, E, S, F leží na jedné kružnici. I když zřejmě body F, S leží na úsečce BC, řešitelé si neuvědomili, že jejich pořadí závisí na délkách odvěsen trojúhelníku ABC. V případě $|AB| > |AC|$ leží na přeponě body v pořadí B, S, F, C, v případě $|AB| < |AC|$ jsou body v pořadí B, F, S, C (a v případě $|AB| = |AC|$ body S a F dokonce splývají). Potom určovali velikost úhlu EAF, porovnávali ji s velikostí úhlu ESB a nakonec s velikostí úhlu EDB. Podle svého obrázku diskutovali jeden z případů a neuvědomili si, že je třeba vést jinou (i když podobnou) diskusi ve druhém z případů. Například v případě na obrázku vzorového řešení leží čtyři uvedené body na kružnici, protože je vidět úsečka ES z bodů A a F pod stejným úhlem, ve druhém případě protože součet protilehlých úhlů u vrcholů A a S ve čtyřúhelníku $AEFS$ je 180°. Podobně se měla větvit diskuse při výpočtu úhlu EAF.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Jiří Škrobánek* z WG v Ostravě-Porubě a *Bára Tížková* z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Denisa Chytilová* a *Jana Pallová*, obě z GJŠ v Přerově, *Vojtěch Lanz* a *Vojtěch Lengál*, oba z GChD v Praze 5, Zborovská, *Josef Minařík*, *Tomáš Perutka*, *Štěpán Šmíd*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Vít Pískovský* z GOH v Ostravě-Porubě, *Martin Raška* z WG v Ostravě-Porubě a *Václav Steinhouser* z G v Dačicích.

Pavel Calábek