

Experimentální realizace Buquoyovy úlohy

ČENĚK KODEJŠKA – JAN ŘÍHA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod

Práce experimentálně ověřuje teoretické řešení úlohy o kmitavém pohybu jednorozměrného otevřeného systému s proměnnou hmotností. Tato úloha je známa z historie pod názvem Buquoyova úloha, protože hrabě J. F. A. Buquoy (1781–1851) se jako první zabýval řešením úloh na pohyb soustav s proměnnou hmotností už v roce 1814. Teoretické řešení Buquoyovy úlohy je v [1].

Teorie byla ověřována experimentálně pomocí soustavy balónku naplněného heliem, který je zatížen zavěšeným ohebným vláknem s proměnnou hmotností (obr. 1). Vztlková síla působící na balónek je tažnou silou soustavy, pro jejíž výpočet se předpokládá, že balónek má přibližně kulový tvar. Při pohybu balónku se mění hmotnost zavěšeného vlákna a tedy i tíhová síla, kterou vlákno působí na balónek. Výsledná síla pak vyvolá tlumené kmitání celé soustavy.



Obr. 1 Balónek naplněný heliem zavěšený na řetízku

Z teoretického hlediska je pohyb soustavy popsán diferenciální rovnicí (viz [1]), přičemž stacionární řešení diferenciální rovnice je dáno vztahem (1)

$$y_c = \frac{F}{\eta g}, \quad (1)$$

kde y_c je výška konce vlákna nad zvolenou nulovou potenciální hladinou ve stavu, kdy se vlákno nepohybuje a výsledná síla je nulová, F je svisle vzhůru působící konstantní síla, η je lineární hustota vlákna a g je tíhové zrychlení.

Při návrhu experimentálního provedení bylo tedy třeba nejprve určit lineární hustotu vlákna. Protože jsme chtěli dosáhnout toho, aby bylo možné experiment demonstrovat ve třídě, jejíž maximální výška bývá přibližně 330 cm, při odhadu lineární hustoty jsme volili $y_c = 2$ m a maximální výšku $y_M \doteq \frac{3}{2}y_c \doteq 3$ m.

Průměrná hodnota průměru balónku byla určena z jeho obvodu jako $d = (30 \pm 2)$ cm, jeho poloměr je tedy $r = (15 \pm 1)$ cm. Uvažujeme-li přibližně kulový tvar, je objem balónku $V \doteq 14,1 \cdot 10^{-3}$ m³.

Na balónek naplněný heliem podle Archimédova zákona působí ve vzduchu vztlaková síla $F_{vz} = V\rho g$, která je současně tažnou silou soustavy. Lineární hustotu pak můžeme vyjádřit jako

$$\eta = \frac{V\rho}{y_c}, \quad (2)$$

kde V je objem balónku a ρ je hustota vzduchu. Po dosazení konkrétních hodnot získáme přibližný odhad lineární hustoty vlákna $\eta = 9,11$ g · m⁻¹.

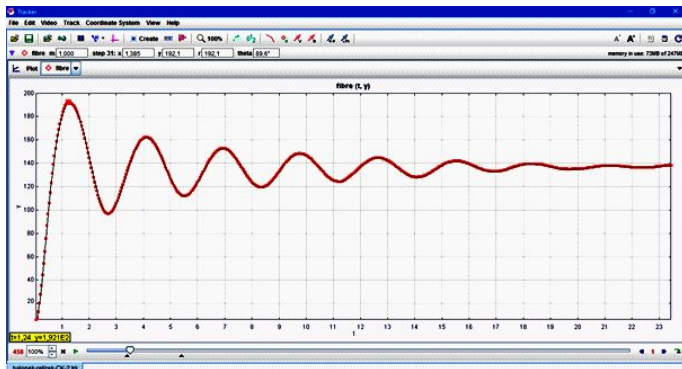
Aby se hmotnost vlákna se stoupající výškou balónku zvyšovala lineárně, musí být vlákno vyrobeno z jednotlivých malých částí, které jsou vzájemně propojeny. Jako optimální se nakonec ukázal řetězec tvořený malými kuličkami používaný většinou v koupelně u umyvadla nebo vany. Protože i zde výrobci dodávají různě velké kuličky, zvolili jsme nakonec řetězec s nejmenšími kuličkami, jehož lineární hustota byla změřena digitální vahou jako $\eta = (10,4 \pm 0,01)$ g · m⁻¹.

2. Realizace experimentu

Systém Buquoyova oscilátoru v rovnovážné poloze je uveden na obr. 1. Jeho pohyb byl zaznamenán digitální kamerou a obrazový záznam byl analyzován metodou videoanalýzy s použitím programu Tracker. Na obr. 2

je výsledný graf závislosti y -ové souřadnice konce vlákna (řetízku) na čase. Z grafu plyne, že stacionární poloha je přibližně $y_m = 1,38$ m, výpočtem určená hodnota podle vztahu (1) dává při tahové síle $F = 0,136$ N výsledek $y_c = 1,33$ m, který je o 4 % menší než experimentálně naměřená hodnota.

Maximální výška výstupu určená experimentálně z grafu na obr. 2 je $y_M = 1,92$ m. Použijeme-li přibližný vztah pro výpočet y_M uvedený výše, získáme hodnotu $y_M = 2,07$ m, která je přibližně o 8 % větší.



Obr. 2 Oscilogram získaný videoanalýzou pohybu řetízku

Pro přesný výpočet můžeme použít vztah (3), viz [1]:

$$y_M = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}(y_c - y_m) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}(y_c - y_m)^2 - 4y_m^2}, \quad (3)$$

kde y_m je počáteční výška balónku (konce řetízku) při pohybu vzhůru s nulovou počáteční rychlostí. Tento vztah můžeme za předpokladu, že $y_m = 0$, zjednodušit na vztah (4):

$$y_M = \frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) y_c \doteq 1,36y_c \quad (4)$$

Po dosazení do vztahu (4) za $y_c = 1,38$ m získáváme hodnotu $y_M = 1,88$ m, která je pro změnu o 2 % menší než hodnota určená experimentálně. Uvážíme-li nejistotu měření přibližně 2 cm, která vznikne nastavením souřadných os a délky kalibrační tyče v programu Tracker, na jednom metru délky získáme stejnou relativní nejistotu, tj. 2 %. Z experimentu tedy plyne v rámci 2% nejistoty měření velice dobrá shoda teorie s experimentálně naměřenými daty pro maximální výšku výstupu.

Všechna měření byla realizována s nulovou počáteční rychlostí. Z obr. 2 je také patrný charakter kmitů vlákna, které koná tlumené kvaziperiodické kmity s periodou blízkou periodě T_S , pro kterou platí podle [1] rovnice (5):

$$T_S = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{F}{\eta}} \quad (5)$$

Námi změřená tahová síla balónku pomocí siloměru Vernier byla $F = (0,136 \pm 0,006)$ N a hodnota periody vypočítaná podle vztahu (5) je $T_S = 2,31$ s. Experimentálně zjištěná průměrná hodnota periody podle grafu na obr. 2 je $T_{\text{exp}} = (2,85 \pm 0,02)$ s. Rozdíl mezi teoreticky vypočítanou hodnotou a experimentálně naměřenou, která je větší, lze vysvětlit tím, že pohyb balónku i vlákna nebyl po celou dobu pohybu kolmý k podložce. Balónek se pohyboval chvílemi i v horizontálním směru, takže došlo k prověšení vlákna a vlečení jeho části po podložce.

Simulace pohybu řetízku upevněného k balónku je založena podle [1] na pohybové rovnici (6):

$$\ddot{y} = g \left(\frac{y_c}{y} - 1 \right) - \frac{1}{2} (1 + \text{sgn } \dot{y}) \frac{\dot{y}^2}{y} \quad (6)$$

Tato diferenciální rovnice speciálním způsobem závisí na rychlosti. V programu Wolfram Mathematica jsme rovnici řešili numericky při využití parametrů daných experimentem (obr. 3):

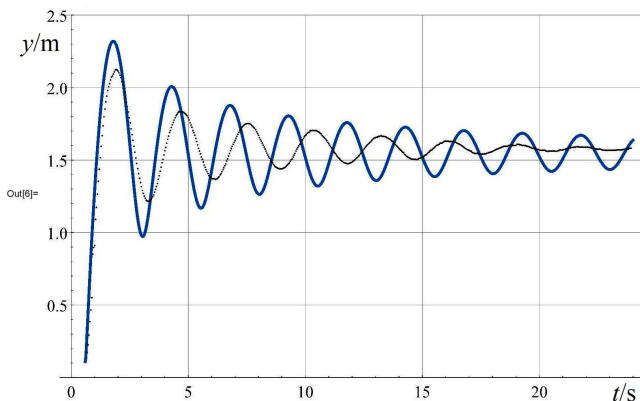
```

In[6]:= Module[{sol =
  NDSolve[{y''[t] = g*(1.55/y[t]-1)-0.5*(1+Sign[y'[t]])*y'[t]^2/y[t],
    y[0.6] = 0.11, y'[0.6] = 0}, y, {t, 0.6, 24}],
  Show[Plot[Evaluate[y[t] /. sol], {t, 0.6, 24}, PlotRange -> {Automatic, {0, 2.5}},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, AxesLabel -> {"t/s", "y/m"},
    GridLines -> Automatic, PlotStyle -> {Thickness[0.005]}],
  ListPlot[oscilace, PlotStyle -> {Black, PointSize[0.002]}]]]

```

Obr. 3

Obr. 4 ukazuje grafický výstup řešení pohybové rovnice (6) v programu Mathematica (modrá křivka) a experimentálně získaná data (černá křivka). Na první pohled je viditelný rozdíl mezi oběma křivkami, který je patrně způsoben odporem vzduchu. Černá křivka vykazuje výraznější tlumení i větší kvazi-periodu mezi jednotlivými průchody rovnovážnou polohou a její průběh je identický s funkcí získanou videoanalýzou v programu Tracker na obr. 2.



Obr. 4 Řešení pohybové rovnice (modrá křivka) a reálný průběh pohybu (černá křivka)

Závěr

Při realizaci experimentálního ověření Buquoyovy úlohy jsme v první fázi řešili realizaci parametrů tohoto oscilátoru, kterými jsou tažná konstantní síla a lineární hustota vlákna. Za zdroj síly jsme nakonec zvolili balónek o průměru $d = (30 \pm 2)$ cm naplněný heliem, ke kterému jsme připevnili koupelnový řetízek složený z jednotlivých malých kuliček. Jeho lineární hustota byla experimentálně určena jako $\eta = (10,4 \pm 0,01)$ g · m⁻¹.

Pohyb řetízků jsme analyzovali nejprve pomocí videoanalýzy v programu Tracker a potom jsme takto získaná data fitovali teoretickou křivkou v programu Wolfram Mathematica. V rámci 2% nejistoty měření jsou v dobré shodě experimentálně naměřené hodnoty maximální výšky výstupu a stacionární polohy s teoreticky vypočítanými. Reálný průběh pohybu se však od teoretického modelu liší jak v hodnotách amplitud, tak v hodnotách period pro pohyb vzhůru i dolů.

Závěrem lze konstatovat, že námi analyzovaný pohyb Buquoyova vlákna pouze částečně odpovídá teoretickým závěrům, které učinili autoři v [1]. Rozdíl je zřejmě způsoben odporem vzduchu při pohybu balónku, který autoři v [1] do modelu nezahrnuli.

Literatura

- [1] Šíma, V., Podolský, J.: Buquoyova úloha. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 3, s. 177.
Dostupné na: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141315>