Polibky kružnic: Philip Beecroft

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Anglický matematik *Phillip Beecroft* (1818–1862) žil v době vzniku a rozvoje projektivní geometrie. Ponceletův princip duality a metody s ním spojené jej pravděpodobně inspirovaly k níže uvedeným objevům. Seznámíme se s obsahem jeho článku o vzájemných dotycích kružnic [1], publikovaném roku 1842 v ročence *The Lady's and Gentleman's Diary* (dále jen *Diary*). Stejně jako on se nebudeme zabývat situacemi, v nichž mají aspoň tři kružnice tentýž bod dotyku.

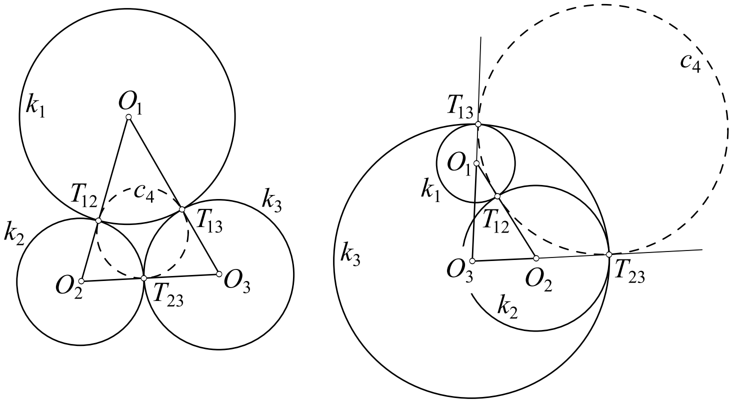
Beecrofrt nejprve uvedl, že jsou jen dvě možné konfigurace pro kružnice $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$ a $k_3(O_3; r_3)$, které se navzájem dotýkají v bodech T_{23}, T_{13} a T_{12}. Body dotyku přitom jednoznačně určují *duální* (*doplňkovou) kružnici* $c_4(C_4; \rho_4)$ opsanou trojúhelníku $T_{23}T_{13}T_{12}$.

V *první konfiguraci* (obr. 1 vlevo) je dotyk všech tří kružnic vnější a kružnice c_4 je trojúhelníku $O_1O_2O_3$ vepsána. *Druhá konfigurace* se vyznačuje jedním vnějším a dvěma vnitřními dotyky a kružnice c_4 je trojúhelníku $O_1O_2O_3$ připsána.

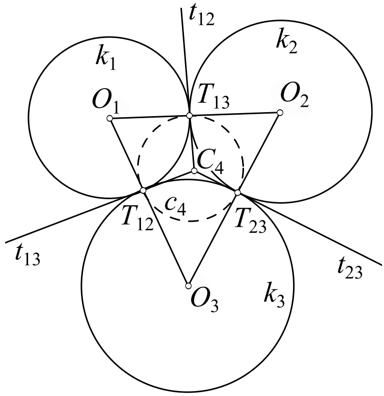
Polohu kružnice c_4 Beecroft zdůvodnil vlastnostmi tečen z bodu ke kružnici. Plyne též z faktu, že společné tečny t_{23}, t_{13} a t_{12} kružnic v jejich bodech dotyku T_{23}, T_{13}, a T_{12} jsou chordály příslušných dvojic kružnic (obr. 2, resp. obr. 3). Mají proto společný průsečík C_4, potenční střed kružnic k_1, k_2 a k_3 stejně vzdálený od bodů T_{23}, T_{13}, T_{12}, a tedy i od přímek O_2O_3, O_1O_3, O_1O_2.

Beecroft dále určil poloměr ρ_4 pomocí poloměrů r_1, r_2 a r_3. Pro každou z konfigurací vyšel jiný vztah, což mu komplikovalo další úvahy. Na rozdíl od něj přijmeme následující znaménkovou dohodu, jež zaručí pro obě konfigurace stejný výsledek. Ten pak vyjádříme větou 1.

Znaménková dohoda Tvoří-li tři navzájem se dotýkající kružnice druhou konfiguraci, pak poloměru (a tedy i křivosti) té kružnice, jež má s druhými dvěma vnitřní dotyk, přiřadíme záporné znaménko.



Obr. 1 Dvě konfigurace vzájemného dotyku tří kružnic



Obr. 2 Střed C_4 kružnice c_4 je potenčním středem kružnic k_1, k_2 a k_3

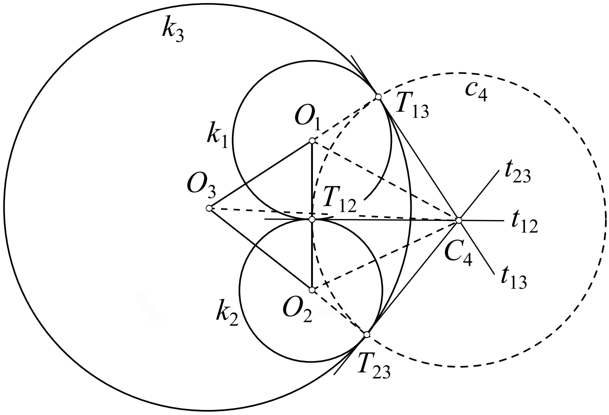
Věta 1

Pro obě konfigurace kružnic $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, $k_3(O_3; r_3)$ a $c_4(C_4; \rho_4)$ platí

$$\frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}. \tag{1}$$

Důkaz. Pro situaci z obr. 3 platí

$$S_{O_1O_3C_4} + S_{O_3O_2C_4} - S_{O_1O_2C_4} = S_{O_1O_2O_3}.$$



Obr. 3 K důkazu vztahu (1)

Pravou stranu této rovnosti vyjádříme pomocí Heronova vzorce a obsahy trojúhelníků na levé straně pomocí výšky ρ_4 z jejich společného vrcholu C_4. Navíc využijeme vztahy $|O_1O_2| = r_1 + r_2$, $|O_2O_3| = -r_3 - r_2$, $|O_1O_3| = -r_3 - r_1$ a (polovina obvodu trojúhelníku $O_1O_2O_3$) $s = -r_3$. Obdržíme

$$\frac{\rho_4}{2}\big((-r_3 - r_1) + (-r_3 - r_2) - (r_1 + r_2)\big) = \sqrt{(-r_3 - r_1 - r_2)r_1r_2(-r_3)}$$

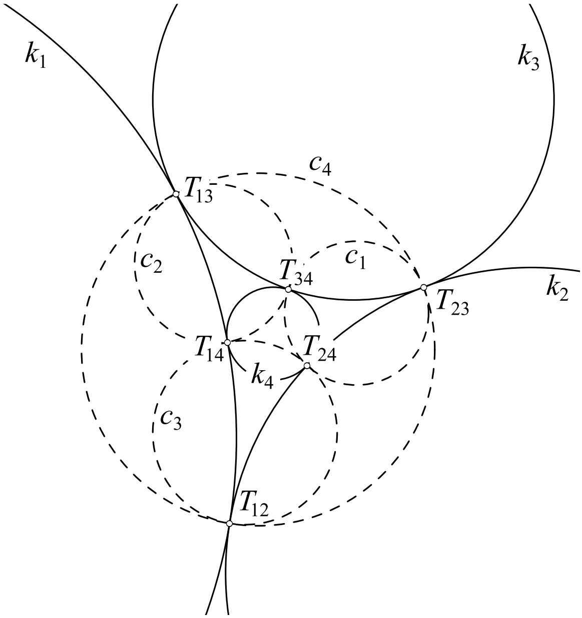
a odtud

$$\rho_4^2 = \frac{r_1r_2(-r_3)}{-r_1 - r_2 - r_3} = \frac{r_1r_2r_3}{r_1 + r_2 + r_3}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1}.$$

Tím je pro druhou konfiguraci dokázán vztah (1). Analogický důkaz pro první konfiguraci přenecháváme čtenáři.

Dále se budeme stejně jako Beecroft zabývat čtveřicemi navzájem se dotýkajících kružnic. Základní kružnice značíme $k_i(O_i; r_i)$, kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a jejich křivosti $\kappa_i = \frac{1}{r_i}$. Označení duálních kružnic volíme $c_i(C_i; \rho_i)$ ve shodě s obr. 4 a jejich křivosti značíme $\varepsilon_i = \frac{1}{\rho_i}$. Věta 2 je přímým důsledkem počátečních úvah.

Věta 2 (Beecroftova)
Čtveřice kružnic, které se navzájem dotýkají v šesti různých bodech, určují duální čtveřici kružnic, jež se navzájem dotýkají ve stejných šesti bodech tak, že každá kružnice z jedné čtveřice protíná kolmo tři kružnice druhé čtveřice v bodech vzájemného dotyku těch tří (obr. 4).



Obr. 4 Navzájem duální čtveřice kružnic

Obě čtveřice kružnic mají stejné vlastnosti a jsou jednoznačně určeny šesti společnými body dotyku. (Beecroft použil termín *concordant circles*). Pokud nalezneme nějaký vztah mezi poloměry nebo křivostmi těchto kružnic, získáme z něj analogické vztahy záměnami $r_i \leftrightarrow \rho_i$ a $\kappa_i \leftrightarrow \varepsilon_i$. Platit budou i vztahy vzniklé cyklickými záměnami indexů.

Kvůli dalším úvahám zapíšeme rovnost (1) pomocí křivostí kružnic a nahradíme ji pro všechny patřičné skupiny kružnic z obr. 4 rovnostmi

$$\kappa_4^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1, \quad \varepsilon_4^2 = \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1 \quad \text{a cykl.} \tag{2}$$

K nalezení dalších vztahů Beecroft použil jen standardní algebraické úpravy.

Věta 3

Součet křivostí čtveřice navzájem se dotýkajících kružnic je vždy kladný a je roven součtu křivostí doplňkové čtveřice kružnic.

Důkaz. První tvrzení je zřejmé. Má-li totiž některá kružnice zápornou křivost, pak je ve čtveřici jen jedna a absolutní hodnota její křivosti je nejmenší.

K důkazu druhého tvrzení sečteme každou z rovností (2) se všemi, které z ní vzniknou cyklickými záměnami. Dostáváme

$$\sum_i \kappa_i^2 = 2\sum_{i<j} \varepsilon_i\varepsilon_j \quad \text{a} \quad 2\sum_{i<j} \kappa_i\kappa_j = \sum_i \varepsilon_i^2.$$

Ze vztahu

$$\Big(\sum_i \kappa_i\Big)^2 = \Big(\sum_i \varepsilon_i\Big)^2$$

vzniklého sečtením obou předchozích rovností plyne

$$\sum_i \kappa_i = \sum_i \varepsilon_i. \tag{3}$$

Věta 4

Pro uvažované čtveřice kružnic platí

$$2\varepsilon_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4, \quad 2\kappa_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \quad \text{a cykl.}, \tag{4}$$

$$\sum_i \kappa_i^2 = 2\sum_{i<j} \kappa_i\kappa_j \quad \text{a} \quad \sum_i \varepsilon_i^2 = 2\sum_{i<j} \varepsilon_i\varepsilon_j, \tag{5}$$

$$\kappa_1 + \varepsilon_1 = \kappa_2 + \varepsilon_2 = \kappa_3 + \varepsilon_3 = \kappa_4 + \varepsilon_4 = \frac{1}{2}\sum_i \kappa_i = \frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i. \tag{6}$$

Důkaz. Ze vztahů (2) a (3) plyne

$$\begin{aligned}
&\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - \kappa_4^2 = \\
&\quad = 2\varepsilon_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 2\varepsilon_4(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4) - 2\varepsilon_4^2 = \\
&\qquad = 2\varepsilon_4(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4) - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1).
\end{aligned}$$

Odtud s úpravou pomocí vzorce pro rozdíl čtverců obdržíme (4):

$$2\varepsilon_4 = \frac{(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)^2-\kappa_4^2}{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4} = \kappa_1+\kappa_2+\kappa_3-\kappa_4.$$

Abychom dokázali vztah (5), umocníme první z rovností (4), zaměníme její strany a za ε_4^2 dosadíme ze vztahu (2). Dostaneme

$$(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3-\kappa_4)^2 = 4(\kappa_1\kappa_2+\kappa_2\kappa_3+\kappa_3\kappa_1) \tag{7}$$

a odtud (5).

Vztahy (6) jsou důsledkem rovností (4) a (3), neboť například

$$2(\kappa_1-\kappa_4) = (\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_1)-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \kappa_1+\varepsilon_1 = \kappa_4+\varepsilon_4.$$

V závěru své práce určoval Beecroft poloměr r kružnice, jež se dotýká tří daných a navzájem se dotýkajících kružnic s poloměry r_1, r_2 a r_3. Uvedl, že po odmocnění vztahu (7) (při vyjádření pomocí poloměrů kružnic) snadno nalezneme obě řešení

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3} \pm 2\sqrt{\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}}. \tag{8}$$

Poznamenejme, že ve skutečnosti diskutoval obě konfigurace, protože neužíval znaménkovou dohodu. Závěry jej přivedly k poznatku, že při použití vztahu (8) odpovídá záporný kořen kružnici, jež má vnitřní dotyky se zadanými třemi kružnicemi.

Pokračování článku vyšlo o tři roky později a zabývá se analýzou obecného Pappova řetězce kružnic, který můžeme vidět na obr. 5). Zde se jím nebudeme zabývat.

V předchozím dílu seriálu jsme ukázali, že vztah (5) je ekvivalentní se Soddyho rovností

$$2\sum_i \kappa_i^2 = \Big(\sum_i \kappa_i\Big)^2, \tag{9}$$

kterou v tomto tvaru Beecroft neuvedl.

V Diary byly též čtenářům předkládány různé problémy k řešení. Problém č. 1736, jehož autor se podepsal zkratkou β, doplnil Beecroftovy poznatky. Přepsali jsme jej do věty 5.

Věta 5

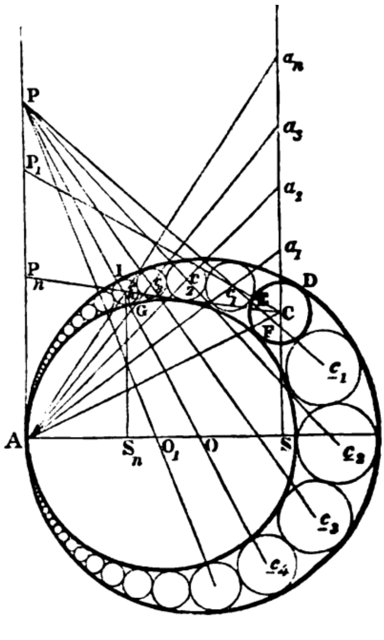
Pro uvažované čtveřice kružnic platí

$$\sum_i \kappa_i \varepsilon_i = 0. \tag{10}$$

Důkaz. (Podle Diary 1846, str. 51.) Po přepsání první z rovností (5) do tvaru

$$0 = \kappa_1(-\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4) + \kappa_2(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4) + \\ + \kappa_3(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4) + \kappa_4(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4)$$

a dosazení za výrazy v závorkách ze vztahů (4) obdržíme (10).



Obr. 5 Ilustrace z ročenky Diary 1845, str. 92

Jiný důkaz. (Coxeter [2].) S využitím vztahů (6) a (9) obdržíme

$$\sum_i \kappa_i \varepsilon_i = \sum_i \kappa_i \left(\frac{1}{2} \Big(\sum_i \kappa_i \Big) - \kappa_i \right) = \frac{1}{2} \Big(\sum_i \kappa_i \Big)^2 - \sum_i \kappa_i^2 = 0.$$

V první polovině 20. století byl časopis Diary včetně Beecroftovy práce téměř zapomenut, stejně jako Steinerovy výsledky popsané v předchozích dílech seriálu. Vztah (9) byl od roku 1936 považován za objev Fredericka Soddyho, který jej bez důkazu popsal formou básně *The Kiss Precise* v časopise Nature. Díky básni se vztah stal populární. O rozšíření poznatků, které s ním souvisí se zasloužili zejména dva významní geometři britského původu, H. S. M. Coxeter (1907–2003) a D. Pedoe (1910–1998).

Coxeter věnoval této problematice několik stránek své knihy *Introduction to Geometry*. V prvním vydání z roku 1961 uvedl zajímavé trigonometrické odvození rovnosti (9). Krátce nato jej L. Bankoff (1908–1997) seznámil s Beecroftovými pracemi. Ty Coxetera zaujaly do té míry, že v druhém vydání z roku 1969 nahradil své původní odvození Beecroftovým, které publikoval i jinde. V příspěvku [3] zdůraznil význam věty 1, která platí i v neeukleidovských geometriích.

Tímto článkem končí náš sedmidílný seriál zaměřený na historii objevu jednoho vztahu. Vznikl ze snahy doplnit Kotlasovu diplomovou práci [4], ve které se čtenář může seznámit s dalšími poznatky. Například s důkazem vztahu (9) užitím kruhové inverze a zmíněným Coxeterovým trigonometrickým odvozením. Úvodem do podrobnějšího studia mohou být články [3]) a [5]) s odkazy na další literaturu.

Literatura

[1] *Beecroft, P.:* Properties of circles in mutual contact, The Lady's and Gentleman's Diary, 1842, s. 91–96. Dostupné na: https://catalog.hathitrust.org/Record/000071981

[2] *Coxeter, H. S. M.:* The Problem of Apollonius, The American Mathematical Monhly, roč. 75 (1968), č. 1, s. 5–15.

[3] *Coxeter, H. S. M.:* An Absolute Property of Four Mutually Tangent Circles, In: Non-Euclidean Geometries: János Bolyai Memorial Volume, Volume 581, Springer, New York, 2006.

[4] *Kotlas, M.:* Polibky kružnic. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, České Budějovice, 2011 (diplomová práce).

[5] *Pedoe, D.:* On a Theorem in Geometry, The American Mathematical Monhly, roč. 74 (1967), č. 6, s. 627–640.