Hvězdicové mnohoúhelníky

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Každý žák základní školy by měl znát pojem *pravidelný n-úhelník*. Běžně se jím rozumí konvexní útvar. Existují však také nekonvexní mnohoúhelníky, které sice přívlastek *pravidelné* v názvu nemají, ale mohli bychom jim ho – vzhledem k jejich symetrii – směle přisoudit. Máme na mysli tzv. *hvězdicové n-úhelníky*, útvary ve výuce na jakémkoli stupni škol opomíjené.

V dalším textu se budeme držet zažitých zvyklostí, tj. termínem *pravidelný n-úhelník* budeme označovat výhradně konvexní pravidelný n-úhelník.

Hvězdicové n-úhelníky můžeme zavést více způsoby. Uvedeme dnes nejběžněji používaný přístup:

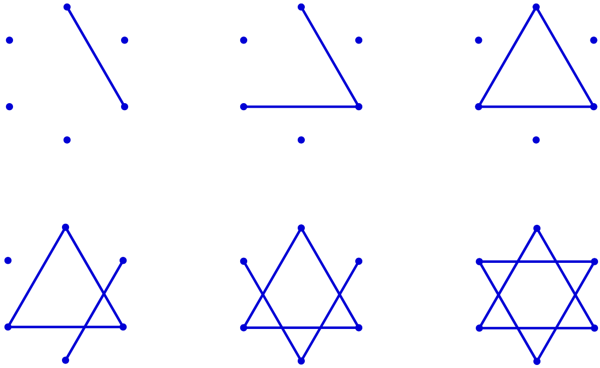
Definice 1

Nechť n a k jsou přirozená čísla, kde $n \geq 5$, $2 \leq k < \frac{n}{2}$, a nechť je na (pomyslné) kružnici pravidelně rozmístěno n bodů (vrcholy pravidelného n-úhelníku). Vybereme jeden z těchto bodů a spojíme ho úsečkou s k-tým bodem, tento bod s dalším k-tým bodem atd. dokud se nenavrátíme do výchozího bodu (uvažujeme přitom body v pořadí, v jakém jsou umístěny na kružnici, a to např. ve směru hodinových ručiček). Jestliže poté zůstanou některé body nepropojené, vybereme jeden z nich a celý proces zopakujeme až do okamžiku, kdy budou všechny body využity[1)] (viz obr. 1 a 2). Vznikne geometrický útvar, jehož obvod tvoří uzavřená lomená čára s $2n$ stranami. Všechny body roviny ohraničené zmíněnou lomenou čarou včetně této hranice nazveme *hvězdicový n-úhelník* (obecněji *hvězdicový mnohoúhelník*). Dané body nazveme *vrcholy* hvězdicového n-úhelníku.

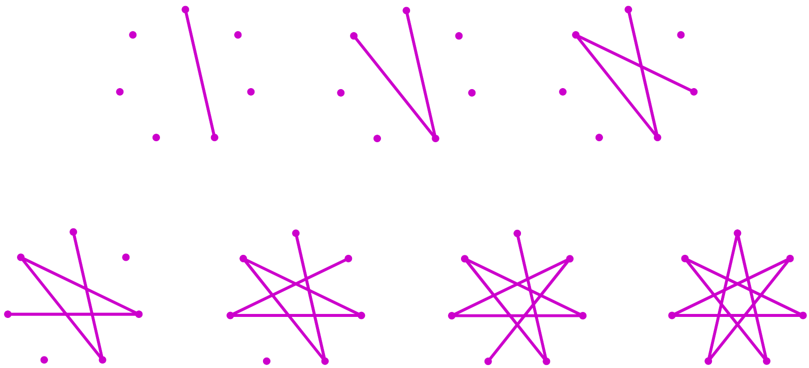
V právě uvedené definici se někdy nepožaduje pravidelné rozmístění bodů po kružnici, termín *hvězdicový n-úhelník* je tedy používán i v obec-

[1)] Každý z bodů tedy spojíme s jeho k-tým „sousedem“, počítáme-li body ve směru hodinových ručiček.

nějším případě. Teorie takových nepravidelných útvarů je však komplikovaná a nebudeme se jí dále zabývat.



Obr. 1 Vznik hvězdicového šestiúhelníku $\{6, 2\}$



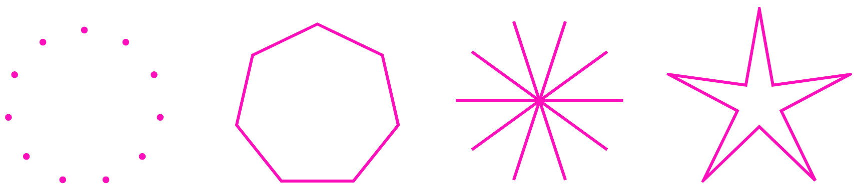
Obr. 2 Vznik hvězdicového sedmiúhelníku $\{7, 3\}$

Hvězdicový n-úhelník vzniklý spojováním k-tých bodů budeme značit $\{n, k\}$. Tento tzv. *Schläfliho symbol* nese jméno švýcarského matematika Ludwiga Schläfliho (1814–1895), který se mimo jiné zabýval tzv. *pravidelnými polytopy*, tj. zobecněním pravidelných mnohoúhelníků a pravidelných mnohostěnů do vyšších dimenzí. Jeho práce [2] byla napsána roku 1852, ale publikována byla až roku 1901, tj. šest let po autorově smrti (více viz [3]).

Vznik hvězdicových mnohoúhelníků $\{6, 2\}$ a $\{7, 3\}$ je znázorněn na obr. 1 a 2. Lze na nich rovněž vidět, že kdybychom připustili možnost $\frac{n}{2} < k < n$, bylo by $\{6,2\} = \{6,4\}$ a $\{7,3\} = \{7,4\}$. Je zřejmé, že by obecně platilo $\{n,k\} = \{n, n-k\}$, a proto není zapotřebí možnost $\frac{n}{2} < k < n$ v definici hvězdicového n-úhelníku uvažovat.

Někdy se pro dané n uvažuje rovněž možnost $k = 1$. V tomto případě spojujeme úsečkami všechny body v tom pořadí, v jakém jsou umístěny na (pomyslné) kružnici, a získáme *pravidelný n-úhelník*.

Existují přístupy, které při zavedení hvězdicového n-úhelníku připouštějí $k = 0$ a za hvězdicový mnohoúhelník $\{n, 0\}$ považují pouze n bodů roviny, tj. vrcholy pravidelného n-úhelníku. Tento mezní případ se poté nazývá *diskrétní hvězdicový mnohoúhelník* (či zkráceně *diskrétní hvězda*) a hvězdicové mnohoúhelníky $\{n,k\}$, $k \geq 1$, se nazývají *nediskrétní*. V literatuře se setkáme i s možností, že je mezi hvězdicové mnohoúhelníky řazen (pro sudé n) případ $k = \frac{n}{2}$. Útvar $\left\{n, \frac{n}{2}\right\}$ je sjednocením $\frac{n}{2}$ „zdvojených“ úseček a nazývá se *hvězdička*.



Obr. 3 Útvary, které nejsou hvězdicovými n-úhelníky

V článku se budeme držet výše uvedené definice: ani diskrétní hvězdu, ani pravidelný n-úhelník, ani hvězdičku tedy nebudeme řadit mezi hvězdicové n-úhelníky. Symboly $\{n, 0\}$, $\{n, 1\}$, $\left\{n, \frac{n}{2}\right\}$ však k jejich označení používat budeme.[2)] Jestliže nebude výslovně specifikováno jinak, budeme n-úhelníkem $\{n,k\}$ rozumět jak pravidelný n-úhelník $\{n,1\}$, tak hvězdicový n-úhelník $\{n,k\}$, $2 \leq k < \frac{n}{2}$.

Raději upozorněme, že ne každý mnohoúhelník, který má tvar hvězdy s pravidelně rozmístěnými „cípy“, je hvězdicovým mnohoúhelníkem. Na obr. 3, na němž jsou zakresleny všechny tři výše uvedené případy útvarů, které za hvězdicové mnohoúhelníky považovat nebudeme, je navíc vpravo mnohoúhelník, který není hvězdicovým mnohoúhelníkem $\{5,2\}$, jak by se mohlo na první pohled zdát. Úsečky tvořící obvod tohoto mnohoúhelníku totiž neleží na spojnicích bodů umístěných na pomyslné kružnici.

[2)] Místo symbolu $\{n,1\}$ se v literatuře používá i zápis $\{n\}$.

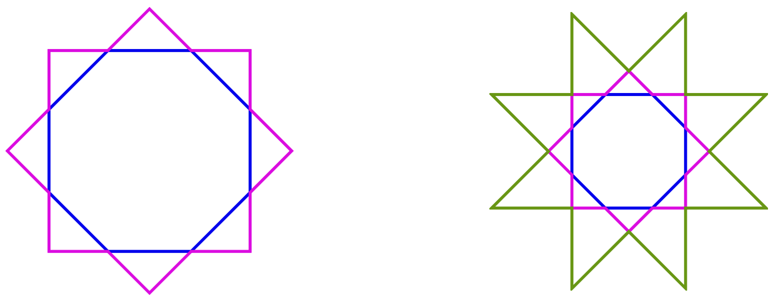
Jiný přístup k zavedení hvězdicových mnohoúhelníků

Než představíme některé vlastnosti hvězdicových mnohoúhelníků, uveďme ještě jejich jinou definici. Analogii níže uvedeného vymezení pojmu použil již ve 14. století Thomas Bradwardine (asi 1295–1349) ve svém textu [1]. Tento anglický teolog, matematik, fyzik a filozof byl prvním, který se hvězdicovými mnohoúhelníky zabýval systematicky. Před ním byla uvedená problematika předmětem zájmu jen sporadicky. Johannes Campanus z Novary (1220–1296) například krátce studoval hvězdicový pětiúhelník $\{5, 2\}$, tzv. *pentagram.*[3)] Později věnovali hvězdicovým mnohoúhelníkům pozornost Regiomontanus (vlastním jménem Johannes Müller, 1436–1476), Charles de Bovelles (též Carolus Bovillus, asi 1475–1567) či Johannes Kepler (1571–1630).

Definice 2

Hvězdicovým n-úhelníkem prvního řádu (řádu 1) rozumíme útvar, který vznikne protažením stran pravidelného n-úhelníku až do jejich průsečíků. Hvězdicový n-úhelník, který vznikne protažením stran hvězdicového n-úhelníku prvního řádu, nazveme *hvězdicový n-úhelník druhého řádu (řádu 2).* Obecně *hvězdicový n-úhelník řádu $p + 1$* získáme výše uvedeným způsobem z hvězdicového n-úhelníku řádu p. Průsečíky protažených stran budeme nazývat *vrcholy* hvězdicového n-úhelníku.

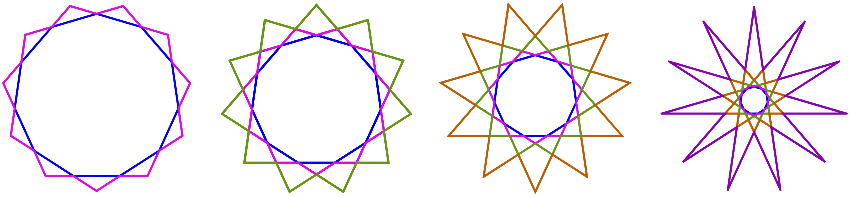
Vznik hvězdicových osmiúhelníků, resp. jedenáctiúhelníků, podle Bradwardinova přístupu je znázorněn na obr. 4, resp. 5. Z uvedených obrázků je rovněž zjevné, že pro dané n nelze tvořit hvězdicové mnohoúhelníky libovolných řádů. Otázku jejich existence budeme řešit níže.



Obr. 4 Hvězdicový osmiúhelník prvního a druhého řádu

[3)] Pentagram se jakožto symbol objevoval již ve starověkém Řecku.

Číslo n má zřejmě v obou definicích hvězdicového mnohoúhelníku stejný význam. Někoho možná napadne otázka, zda Bradwardinem zavedeným řád p hvězdicového n-úhelníku je roven číslu k v symbolu $\{n, k\}$. Odpověď je sice negativní, avšak vztah mezi nimi existuje, a to velmi triviální: $k = p + 1$. Zatímco k vyjadřuje *kolikátý bod* se má *spojit*, p sděluje, *kolik bodů* máme při spojování „*přeskočit*". (Například na obr. 5 je na třetím místě zleva jedenáctiúhelník třetího řádu. Vznikl po třetím prodloužení stran „předchozích" mnohoúhelníků. Současně však mohl být získán spojováním vrcholů, při němž vynecháváme tři body, tj. spojováním každého čtvrtého bodu.)



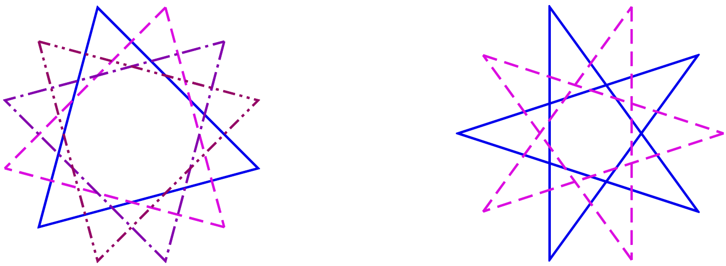
Obr. 5 Hvězdicový jedenáctiúhelník prvního až čtvrtého řádu

Jednoduché a složené hvězdicové n-úhelníky

Hvězdicové n-úhelníky můžeme rozdělit na *jednoduché* a *složené*. Jednoduché hvězdicové n-úhelníky vznikají v případě, že se nám podaří propojit – spojováním každého k-tého bodu – všechny body „jedním tahem". Naopak při vzniku složených hvězdicových n-úhelníků se po určitém počtu kroků vrátíme do výchozího bodu, některé body zůstanou nespojeny a postup musíme zopakovat. Typickým případem složeného hvězdicového n-úhelníku je hvězdicový n-úhelník $\{n,\ k\}$, kde k dělí n. Takový složený hvězdicový n-úhelník $\{n,\ k\}$ je sjednocením k pravidelných $\frac{n}{k}$-úhelníků.

Na obr. 6 je nalevo hvězdicový dvanáctiúhelník $\{12, 4\}$, který je sjednocením čtyř rovnostranných trojúhelníků ($\frac{12}{4} = 3$). Složené však nejsou pouze hvězdicové mnohoúhelníky $\{n, k\}$, kde k dělí n. Na obr. 6 vpravo je hvězdicový desetiúhelník $\{10, 4\}$, který je složený ze dvou hvězdicových pětiúhelníků $\{5, 2\}$. Číslo 4 sice nedělí číslo 10, ale dělí číslo 20 (každý z pentagramů se utvoří po „dvojitém průchodu po kružnici").

Pokusme se odvodit, z kolika a z jakých mnohoúhelníků je složen obecný hvězdicový mnohoúhelník $\{n, k\}$. Nejmenší společný násobek čísel n a k označme s a jejich největší společný dělitel d. Přesun z bodu na sousední bod ležící na (pomyslné) kružnici nazývejme *krok* (ke spojení bodu s k-tým bodem v pořadí tedy provedeme k kroků).



Obr. 6 Složené hvězdicové mnohoúhelníky $\{12, 4\}$, $\{10, 4\}$

Do výchozího bodu se při spojování každého k-tého bodu navrátíme právě po s krocích. Je dobře známo, že $sd = nk$. Složené hvězdicové mnohoúhelníky vznikají právě tehdy, když $s < nk$, tj. když $d > 1$. Hvězdicový mnohoúhelník je tedy složený (jednoduchý) právě tehdy, když jsou čísla n a k soudělná (nesoudělná).

Při spojování každého k-tého bodu provedeme s kroků právě tehdy, když spojíme $\frac{s}{k}$ bodů, tj. hvězdicový mnohoúhelník $\{n, k\}$ je složen z mnohoúhelníků (buď z pravidelných n-úhelníků, jestliže k dělí n, nebo z hvězdicových n-úhelníků, jestliže k nedělí n) majících $\frac{s}{k}$ vrcholů. Protože $s = \frac{nk}{d}$, je přitom

$$\frac{s}{k} = \frac{n}{d}.$$

Jelikož na vytvoření každého z těchto $\frac{n}{d}$-úhelníků je potřeba $\frac{n}{d}$ bodů z původních n bodů, je těchto mnohoúhelníků d. Protože vrcholem $\frac{n}{d}$-úhelníku je každý d-tý bod z původních n bodů, je každý k-tý bod na kružnici s n body každým $\frac{k}{d}$-tým bodem na kružnici s $\frac{n}{d}$ body.

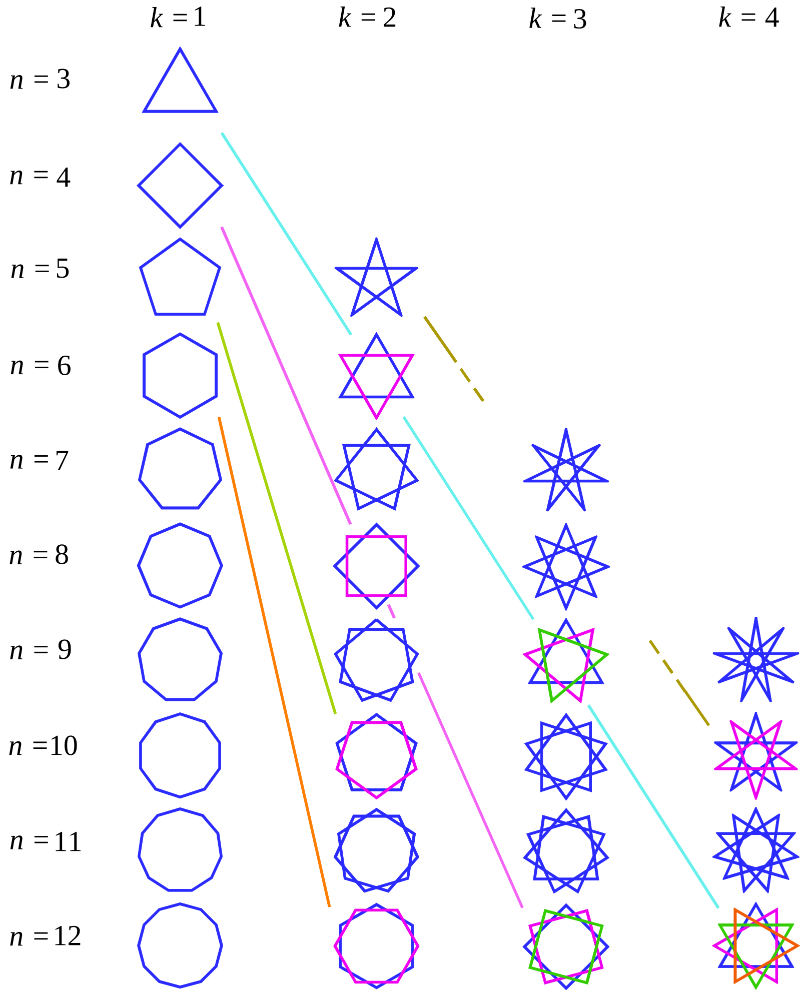
Celkově jsme tedy dokázali následující tvrzení:

Věta

Nechť $\{n, k\}$ je hvězdicový n-úhelník a nechť d je největší společný dělitel čísel n a k. Hvězdicový n-úhelník $\{n, k\}$ je složený, právě když n a k jsou čísla soudělná. V opačném případě je jednoduchý. Hvězdicový n-úhelník $\{n, k\}$ je složen z d mnohoúhelníků $\left\{\frac{n}{d}, \frac{k}{d}\right\}$.

Například hvězdicový dvacetičtyřúhelník $\{24, 9\}$ je složen ze tří osmiúhelníků $\{8, 3\}$, hvězdicový čtyřicetiúhelník $\{40, 12\}$ je složen ze čtyř desetiúhelníků $\{10, 3\}$. Hvězdicový n-úhelník $\{n, k\}$, který je jednoduchý (tedy $d = 1$), je „složen“ z jednoho n-úhelníku $\{n, k\}$. Z věty též plyne, že hvězdicový n-úhelník $\{n, k\}$, kde n je prvočíslo, je vždy jednoduchý.

Na obr. 7 je přehled pravidelných a hvězdicových n-úhelníků $\{n, k\}$ pro $n = 3, 4, \ldots, 12$ a $k = 1, 2, 3, 4$.



Obr. 7 Přehled mnohoúhelníků $\{n, k\}$

Složené hvězdicové mnohoúhelníky $\{6, 2\}$, $\{9, 3\}$, $\{12, 4\}$ jsou složené z rovnostranných trojúhelníků $\{3, 1\}$, hvězdicové mnohoúhelníky $\{8, 2\}$,

$\{12, 3\}$ se skládají ze čtverců $\{4, 1\}$, hvězdicový mnohoúhelník $\{10, 2\}$ je sjednocením pravidelných pětiúhelníků $\{5, 1\}$, hvězdicový mnohoúhelník $\{12, 2\}$ je vytvořen z pravidelných šestiúhelníků $\{6, 1\}$ a hvězdicový mnohoúhelník $\{10, 4\}$ je sjednocením pentagramů $\{5, 2\}$. Dále je na tomto obrázku vidět, že pro prvočíslo n jsou hvězdicové mnohoúhelníky $\{n, k\}$ vždy jednoduché.

Mnohý čtenář již zřejmě zpozoroval souvislost mezi mnohoúhelníky $\{n, k\}$ a zlomky n/k. Hvězdicový mnohoúhelník $\{n, k\}$ je jednoduchý právě tehdy, když je zlomek n/k v základním tvaru. Hvězdicové mnohoúhelníky $\{n_1, k_1\}$ a $\{n_2, k_2\}$ jsou složeny ze stejných pravidelných nebo z jednoduchých hvězdicových mnohoúhelníků $\{n_0, k_0\}$, $k_0 \geq 1$, jestliže základní tvar zlomků n_1/k_1 a n_2/k_2 je n_0/k_0. Pokud tedy platí

$$\frac{n_1}{k_1} = \frac{a \cdot n_0}{a \cdot k_0},$$

resp.

$$\frac{n_2}{k_2} = \frac{b \cdot n_0}{b \cdot k_0},$$

kde a, b jsou přirozená čísla, je mnohoúhelník $\{n_1, k_1\}$, resp. $\{n_2, k_2\}$, složen z a, resp. z b, mnohoúhelníků $\{n_0, k_0\}$. Například

$$\frac{30}{12} = \frac{15}{6} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2},$$

přičemž

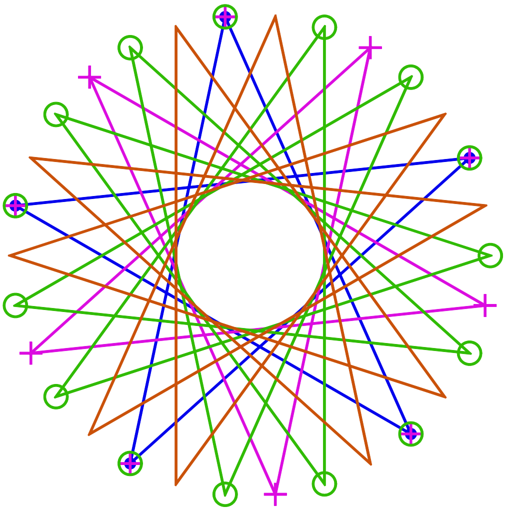
$$\frac{30}{12} = \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 2}, \quad \frac{15}{6} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 2}, \quad \frac{10}{4} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 2}.$$

Hvězdicový mnohoúhelník $\{30, 12\}$, resp. $\{15, 6\}$, resp. $\{10, 4\}$, je tedy sjednocením 6, resp. 3, resp. 2, jednoduchých hvězdicových mnohoúhelníků $\{5, 2\}$, tj. pentagramů. Všechny uvedené hvězdicové mnohoúhelníky lze nalézt na obr. 8. U mnohoúhelníku $\{5, 2\}$ přitom uvažujeme pouze vrcholy (a jejich spojnice), které jsou zvýrazněny vyplněným kroužkem, u mnohoúhelníku $\{10, 4\}$ jen vrcholy s křížkem, u mnohoúhelníku $\{15, 6\}$ vrcholy opatřené kružnicí, ale u mnohoúhelníku $\{30, 12\}$ vrcholy všechny.

Existence hvězdicových mnohoúhelníků

Všimněme si, že některá místa jsou na obr. 7 ponechána prázdná, neboť hvězdicové n-úhelníky řádu $k \geq \frac{n}{2}$ neuvažujeme. Z definice 1 vyplývá, že pro $n \geq 5$ existuje (až na podobnost) právě $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ hvězdicových n-úhelníků $\{n, k\}$ (a to pro $k = 2, 3, \ldots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$), kde $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ značí horní celou část čísla $\frac{n}{2}$.

Pokud postupujeme podle Bradwardinovy definice 2, snadno zjistíme, že nejmenším hvězdicovým n-úhelníkem prvního řádu je pentagram $\{5, 2\}$ a druhého řádu sedmiúhelník $\{7, 3\}$ (tedy i při Bradwardinově přístupu stačí uvažovat $n \geq 5$). Zjištění maximálního řádu $p = k - 1$ je již pro relativně malé p časově náročnější. Průsečíky protahovaných stran přestanou vznikat pro $p = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$.



Obr. 8 Složený hvězdicový mnohoúhelník $\{30, 12\}$

V článku jsme se seznámili především s různými přístupy k definici hvězdicových mnohoúhelníků a představili souvislost složených hvězdicových mnohoúhelníků s konvexními pravidelnými n-úhelníky, resp. s jednoduchými hvězdicovými n-úhelníky. V následujícím čísle časopisu se budeme zabývat metrickými vlastnostmi těchto na pohled půvabných rovinných útvarů.

Literatura

[1] *Bradwardine, T.*: Geometria speculativa, Paris, 1495; anglický překlad: Molland, A. G.: Geometria Speculativa, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, Stuttgart, 1989.

[2] *Schläfli, L.*: Theorie des vielfachen Kontinuität, Aufträge der Denkschriften-Kommission der Schweizer naturforschender Gesellschaft, Zurcher & Furrer, 1901.

[3] *Stillwell, J.*: Příběh stodvacetistěnu v $\mathbb{R}^4$. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 46 (2001), s. 265–280.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 241 a 242 můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 241

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 \geq \frac{2}{3}\,(xy + yz + zx + x + y + z).$$

Kdy nastane rovnost?

Jaroslav Švrček

Úloha 242

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek (ortocentrum). Předpokládejme, že kružnice $k(O, |OV|)$ protíná jeho výšky (jako přímky) z vrcholů A, B, C kromě bodu V po řadě v bodech $A' \neq V$, $B' \neq V$, $C' \neq V$. Dokažte, že trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC.

Šárka Gergelitsová