Literatura

[1] *Bradwardine, T.*: Geometria speculativa, Paris, 1495; anglický překlad: Molland, A. G.: Geometria Speculativa, Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, Stuttgart, 1989.

[2] *Schläfli, L.*: Theorie des vielfachen Kontinuität, Aufträge der Denkschriften-Kommission der Schweizer naturforschender Gesellschaft, Zurcher & Furrer, 1901.

[3] *Stillwell, J.*: Příběh stodvacetistěnu v $\mathbb{R}^4$. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 46 (2001), s. 265–280.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 241 a 242 můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 241

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 \geq \frac{2}{3}\,(xy + yz + zx + x + y + z).$$

Kdy nastane rovnost?

Jaroslav Švrček

Úloha 242

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek (ortocentrum). Předpokládejme, že kružnice $k(O, |OV|)$ protíná jeho výšky (jako přímky) z vrcholů A, B, C kromě bodu V po řadě v bodech $A' \neq V$, $B' \neq V$, $C' \neq V$. Dokažte, že trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC.

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 237 a 238, jejichž zadání najdete ve čtvrtém čísle minulého (26.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 237

Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D. Na jeho hranách AD, BD, CD uvažujme po řadě body X, Y, Z, pro něž platí

$$\frac{|AX|}{|XD|} + \frac{|BY|}{|YD|} + \frac{|CZ|}{|ZD|} = 1.$$

Dokažte, že těžiště tohoto čtyřstěnu leží v rovině XYZ.

Řešení. Daný čtyřstěn umístíme do kartézské soustavy souřadnic $Oxyz$ tak, že bod D leží v počátku O a body A, B, C leží po řadě na kladných poloosách x, y, z. Nechť v této souřadnicové soustavě mají body následující souřadnice:

$$A[a,0,0],\ B[0,b,0],\ C[0,0,c],\ D[0,0,0],\ X[\xi,0,0],\ Y[0,\eta,0],\ Z[0,0,\zeta].$$

Protože body A, B, C leží na kladných poloosách, body X, Y, Z na příslušných hranách a podle zadání jsou vzdálenosti $|XD|$, $|YD|$ a $|ZD|$ nenulové, platí

$$0 < \xi \le a, \quad 0 < \eta \le b, \quad 0 < \zeta \le c.$$

Podle zadání pak platí

$$1 = \frac{|AX|}{|XD|} + \frac{|BY|}{|YD|} + \frac{|CZ|}{|ZD|} = \frac{a-\xi}{\xi} + \frac{b-\eta}{\eta} + \frac{c-\zeta}{\zeta} = \frac{a}{\xi} + \frac{b}{\eta} + \frac{c}{\zeta} - 3.$$

Odtud plyne

$$\frac{a}{\xi} + \frac{b}{\eta} + \frac{c}{\zeta} = 4. \tag{1}$$

Snadno ověříme, že body X, Y, Z leží v rovině

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 1$$

(tzv. úsekový tvar roviny XYZ). Ukážeme, že v této rovině také leží těžiště T čtyřstěnu se souřadnicemi $T\left[\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}b, \frac{1}{4}c\right]$. Užitím (1) platí

$$\frac{\frac{a}{4}}{\xi} + \frac{\frac{b}{4}}{\eta} + \frac{\frac{c}{4}}{\zeta} = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{\xi} + \frac{b}{\eta} + \frac{c}{\zeta}\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Poznámka. Jak si povšiml např. *Anton Hnáth*, pro řešení není potřeba podmínka kolmosti hran u vrcholu D. Tvrzení platí pro libovolný čtyřstěn, stačí uvažovat souřadnicovou soustavu (ne nutně kartézskou) s počátkem D tak, aby body A, B, C ležely na příslušných poloosách.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Vít Jelínek*, *Josef Minařík* a *Štěpán Šmíd*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Martin Raška* a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě.

Úloha 238

Určete všechna celá čísla n, pro která je číslo

$$4n^2 - 9n + 16$$

druhou mocninou přirozeného čísla.

Pavel Calábek

Řešení. Označme m přirozené číslo, pro které platí

$$4n^2 - 9n + 16 = m^2.$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$\left(2n - m - \frac{9}{4}\right)\left(2n + m - \frac{9}{4}\right) + 16 = \frac{81}{16},$$

tedy

$$(8n - 4m - 9)(8n + 4m - 9) = -175.$$

Protože m je přirozené číslo, jsou obě čísla $8n - 4m - 9 < 8n + 4m - 9$ celá, jejich součin je záporné číslo, tedy platí

$$8n - 4m - 9 < 0 < 8n + 4m - 9.$$

Zbytek při dělení čtyřmi je u obou čísel roven 3, hledáme tak všechny rozklady čísla

$$-175 = -5^2 \cdot 7$$

na součin dvou celých čísel, která při dělení čtyřmi dávají zbytek 3. Vyhovují pouze rozklady uvedené v následující tabulce, ve které současně dopočítáme hodnoty n a m řešením příslušné soustavy rovnic.

$8n-4m-9$	-25	-5	-1
$8n+4m-9$	7	35	175
n	0	3	12
m	4	5	22

Z tabulky jsou patrné všechny hodnoty celého čísla n, které vyhovují zadání. Jsou to čísla $n \in \{0, 3, 12\}$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Denisa Chytilová* a *Jana Pallová*, obě z GJŠ v Přerově, *Vít Jelínek*, *Josef Minařík* a *Štěpán Šmíd*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, Parléřova, *Vojtěch Lanz* a *Vojtěch Lengál*, oba z GChD v Praze 5, Zborovská, *Jiří Nábělek* a *Bára Tížková*, oba z GMK v Bílovci. *Vít Pískovský* z GOH v Ostravě-Porubě, *Martin Raška* a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě a *Václav Steinhauser* z G v Dačicích.

Neúplné řešení zaslal *Tomáš Perutka* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Pavel Calábek