

Netradiční experimenty s vázanými oscilátory

OLDŘICH LEPIL – ČENĚK KODEJŠKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod

Poznatky o dějích ve vázaných oscilátorech mají klíčový význam pro výklad zásadního rozdílu mezi kmitáním izolovaného oscilátoru a dějů v lineární soustavě oscilátorů spojených vazbou, kterou se šíří vlnění. Pro izolovaný oscilátor je charakteristická jedna vlastní (rezonanční) frekvence určená parametry oscilátoru (např. hmotností a tuhostí u mechanického oscilátoru, popř. indukčností a kapacitou u elektromagnetického oscilátoru). Soustavou vázaných oscilátorů se může šířit vlnění o různé frekvenci a dochází k přenosu energie. Tyto děje jsou však podstatně složitější a o to významnější je jejich prezentace experimentem. Nové možnosti pro experimentální studium dějů ve vázaných oscilátorech a jejich názornou prezentaci podporovanou počítačovými programy ukážeme v další části příspěvku.

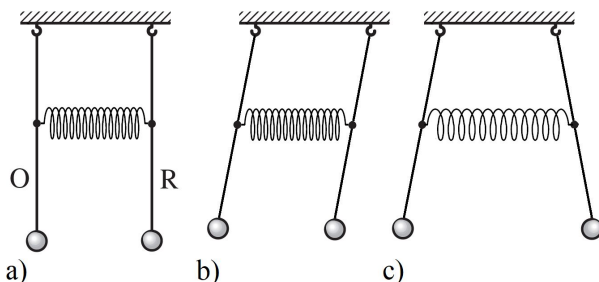
Mechanické vázané oscilátory

Většina učebnic fyziky se omezuje jen na výklad mechanických vázaných oscilátorů v podobě *spřažených kyvadel* (obr. 1a), která lze v praxi snadno realizovat. Experimentem se spřaženými kyvadly ukážeme, že se energie kmitání prvního kyvadla – *oscilátoru* postupně přenáší k druhému oscilátoru – *rezonátoru*. Tento děj se periodicky opakuje a v soustavě spřažených kyvadel vznikají rázy. Vznik rázů interpretujeme tak, že jde o superpozici

dvou módů kmitání, které se liší periodou. *Symetrický mód* odpovídá případu, kdy mají obě kyvadla v počátečním okamžiku stejnou počáteční fázi (obr. 1b). Při ní se vazba neprojeví a obě kyvadla kmitají se stejnou úhlovou frekvencí $\omega_1 = \omega_0$, jaká odpovídá vlastní frekvenci oscilátoru bez spřažení. Při antisymetrickém módu (obr. 1c) je počáteční fáze kyvadel opačná. Z názoru je zřejmé, že vlivem působení vazby budou kyvadla kmitat s kratší periodou, tedy s větší úhlovou frekvencí $\omega_2 > \omega_0$. Perioda kmitání závisí na velikosti vazebné síly, která je úměrná rozdílu výchylek obou kyvadel. Z teorie vyplývá (viz např. [1]), že symetrickému a antisymetrickému módu kmitání vázaných oscilátorů odpovídají úhlové frekvence

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2c},$$

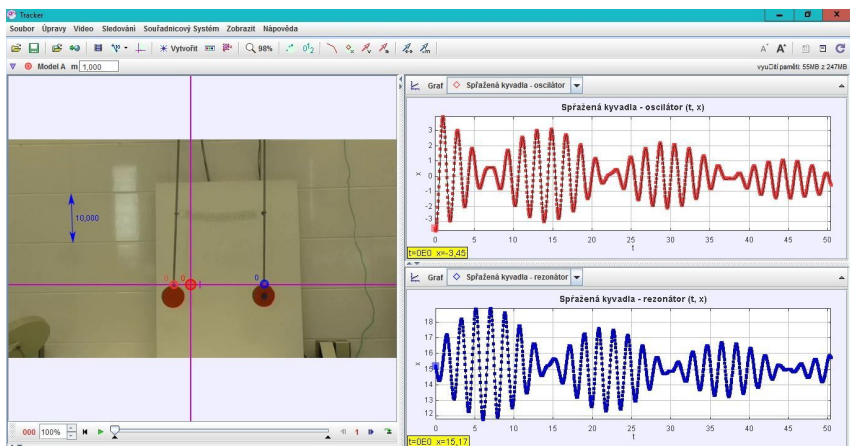
kde c je činitel vazby, který je v případě kyvadel spřažených pružinou úměrný její tuhosti. Čím větší je tedy činitel vazby, tím rychleji dochází k výměně energie mezi oscilátory a frekvence rázů je větší.



Obr. 1

• Videoanalýza kmitání spřažených kyvadel

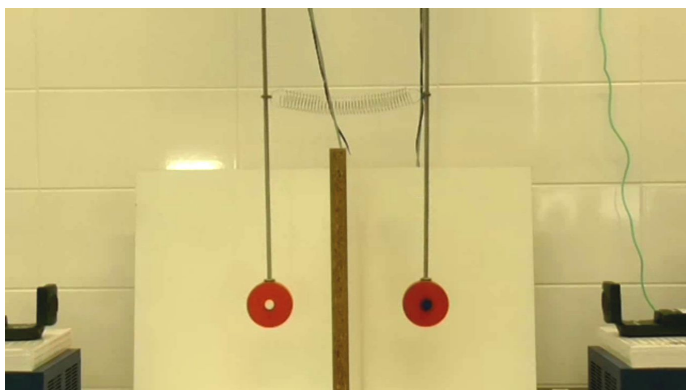
Časový diagram kmitání spřažených kyvadel můžeme poměrně jednoduše získat metodou videoanalýzy, která je dostupná i pro samostatnou práci žáků. Pro videoanalýzu mechanických pohybů existuje více programů, z nichž se jako nejvhodnější jeví program Tracker [1]. Analyzován byl obrazový záznam kmitání spřažených kyvadel fy PHYWE, určených pro klasické laboratorní cvičení. Obrazový záznam pořízený digitální kamerou má dobu trvání přibližně 1 min (1 260 snímků). Při frekvenci snímání 25 obr./s jde o posloupnost snímků s časovým krokem 0,04 s. Výsledek videoanalýzy je patrný z obr. 2.



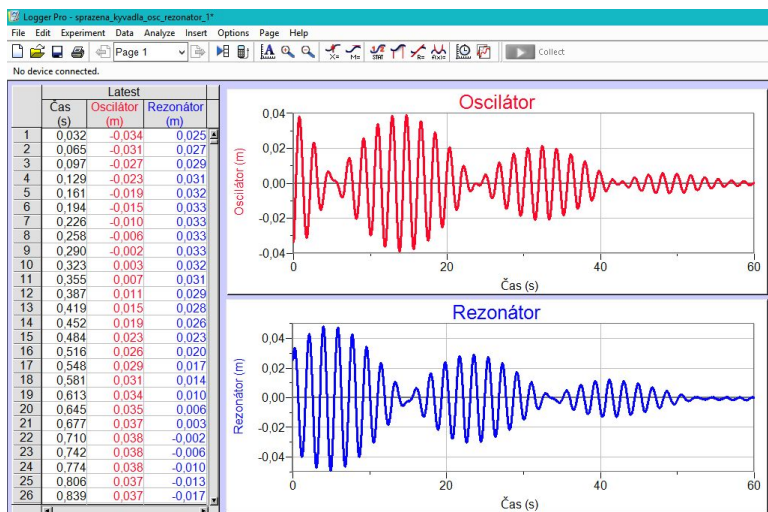
Obr. 2

• Záznam kmitání spřažených kyvadel sonarem Vernier

Další možností počítačem podporovaného experimentu se spřaženými kyvadly je využití měřicího systému Vernier, jehož součástí jsou senzory polohy a pohybu Motion Detector 2. Uspořádání experimentu se dvěma senzory je patrné z obr. 3. Aby nedocházelo k vzájemnému rušení současného záznamu kmitů oscilátoru i rezonátoru, byla mezi kyvadla umístěna přepážka. Získaná data byla analyzována programem Logger Pro [II] (obr. 4).



Obr. 3



Obr. 4

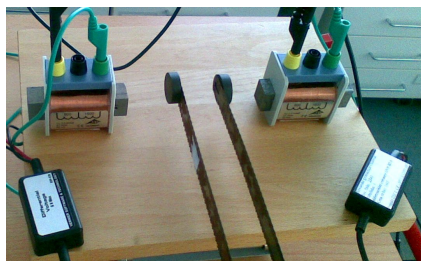
• Záznam kmitání pružných pásků spřažených magneticky

V učivu o kmitání je dána přednost pružinovému oscilátoru před kyvadlem. Demonstrace vázaných pružinových oscilátorů je obtížná a ve výuce se omezujeme jen na počítačové simulace. Snadno však ukážeme pružné kmity soustavy dvou ocelových pásků délky cca 30 cm, umístěných ve vzájemné vzdálenosti asi 3 cm. Vazbu zajišťují dva feritové magnety přichycené ke koncům pásků tak, že se navzájem odpuzují (obr. 5). Hmotnost magnetů ovlivňuje také frekvenci kmitání pásků. V blízkosti magnetů jsou umístěny cívky z rozkladného transformátoru (600 závitů, rovné jádro). Při pohybu magnetů se v cívkách indukují napětí, které je sice funkcí rychlosti pohybu magnetů, ale časový diagram poskytuje informaci o kmitání obou oscilátorů. Potřebná data byla získána připojením senzorů napětí (DVP-BTA) a pro jejich zpracování byl použit program Logger Pro (obr. 6).

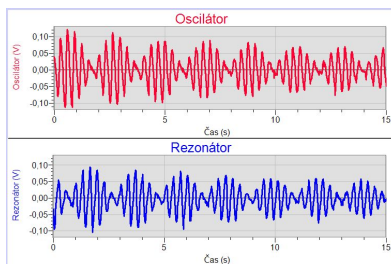
Elektromagnetické vázané oscilátory

K experimentu byly použity dva oscilační obvody LC tvořené cívkami s 600 závity s rovným jádrem a kondenzátory o kapacitě 1 μF . Cívky jsou umístěny na společné ose tak, že mezi jádry cívek je měnitelná vzduchová mezera o šířce přibližně 4 cm (obr. 7). Pro buzení elektrických kmitů v oscilátoru je použit poměrně originální postup, který se liší od způsobu,

jakým je rozkmitání oscilátoru popisováno ve většině učebnic fyziky (nabití kondenzátoru a jeho vybití připojením k cívce). Použili jsme obrácený postup, kdy cívkou protéká proud a po jeho přerušení vypínačem se v cívce indukuje dostatečně velké napětí. Tímto napětím se nabije kondenzátor a oscilátor se rozkmitá. K tomu stačí i malé připojené napětí např. z ploché baterie 4,5 V (podrobněji viz [2]).

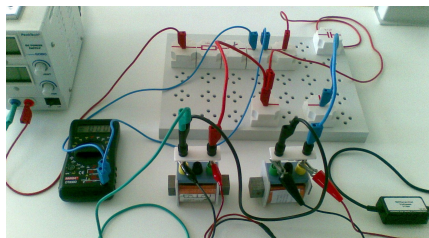


Obr. 5

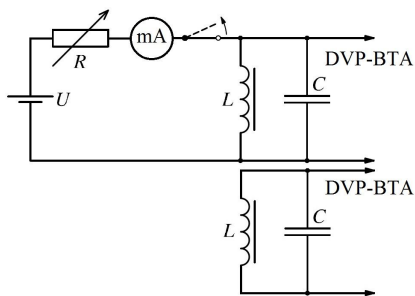


Obr. 6

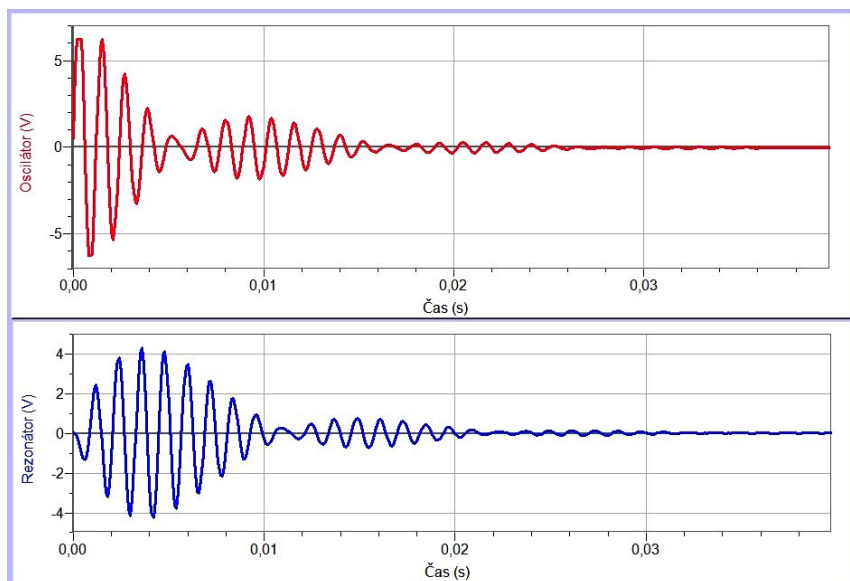
Schéma obvodu pro demonstraci kmitání vázaných oscilátorů s indukční vazbou je na obr. 8. Získaná data byla opět zpracována programem Logger Pro (obr. 9). Experimenty byly provedeny jak s indukčně, tak s kapacitně vázanými obvody (obr. 10; vazební kondenzátor C_v měl rovněž kapacitu 1 μF). Základním problémem této demonstrace je relativně velký odpor použitých cívek a tomu odpovídající tlumení kmitů. Činitel tlumení oscilačního obvodu $\delta = R/2L$, takže by bylo možné zmenšit ho zvětšením indukčnosti cívky. Ta však závisí na počtu závitů vinutí cívky, ale větší počet závitů má za následek zvětšení odporu vinutí cívky. Je tedy třeba volit kompromis mezi hodnotami L a R , popř. provést výběr cívky, která při experimentu vykazuje nejlepší výsledky.



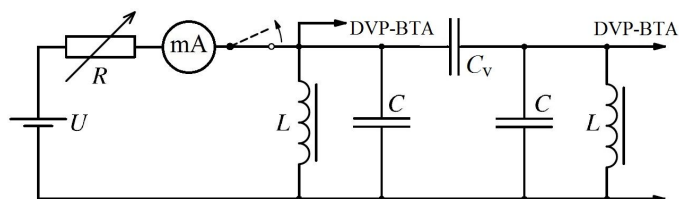
Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

Modely kmitání vázaných oscilátorů

Současné počítačové technologie umožňují také vytvářet poměrně snadno interaktivní modely dějů ve vázaných oscilátorech, které jsme v předcházející části příspěvku studovali reálným experimentem. Východiskem těchto modelů jsou diferenciální rovnice popisující odpovídající děje. Jejich analytické řešení je pro středoškolskou výuku ovšem nedostupné. Dostatečně názorné řešení tohoto problému však představuje metoda dynamického modelování, založená na numerickém řešení diferenciálních rovnic [3].

Při modelování se uplatní také analogie mezi mechanickým a elektromagnetickým kmitáním. Jako příklady vázaných oscilátorů uvedeme pružinové oscilátory spřažené výchylkou a elektromagnetické oscilační obvody vázané indukční vazbou. Děje v těchto vázaných oscilátorech popisují následující rovnice:

Spřažené pružinové oscilátory	Oscilační obvody s indukční vazbou
$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} + b \frac{dy_1}{dt} + ky_1 + c(y_1 - y_2) = 0$	$L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + R \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + M \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0$
$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} + b \frac{dy_2}{dt} + ky_2 - c(y_1 - y_2) = 0$	$L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C} + M \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0$

Pro jednoduchost uvažujeme vázané oscilátory se stejnými parametry m (hmotnost), k (tuhost pružiny), popř. L (indukčnost cívky) a C (kapacita kondenzátoru). Tlumení oscilátorů určuje součinitel odporu b ovlivňující rychlost kmitání oscilátoru, popř. odpor R oscilačního obvodu, na němž závisí velikost proudu v obvodu. Veličina c je činitel vazby u mechanických oscilátorů a M je vzájemná indukčnost indukčně vázaných oscilátorů.

Dynamický model kmitání vázaných mechanických oscilátorů popisují rovnice (h je časový krok):

$$F_1 = m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -ky_1 - bv_1 + c(y_1 - y_2)$$

$$F_2 = m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -ky_2 - bv_2 - c(y_1 - y_2)$$

$$a_1 = \frac{F_1}{m}, \quad a_2 = \frac{F_2}{m}$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + a_1 \cdot h, \quad v_{2,i+1} = v_{2,i} + a_2 \cdot h$$

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + v_{1,i+1} \cdot h, \quad y_{2,i+1} = y_{2,i} + v_{2,i} \cdot h$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Poněkud složitější je model elektromagnetických vázaných oscilátorů. Poněvadž platí

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{di}{dt}, \quad \frac{dq}{dt} = i, \quad R \frac{dq}{dt} = Ri = u_R, \quad \frac{q}{C} = u_c,$$

najdeme úpravou rovnic pro vázané elektromagnetické oscilátory přírůsteky proudu di za časový krok dt :

$$di_1 = \frac{M(u_{R2} + u_{C2}) - L(u_{R1} + u_{C1})}{L^2 - M^2}$$

$$di_2 = \frac{M(u_{R1} + u_{C1}) - L(u_{R2} + u_{C2})}{L^2 - M^2}$$

V modelu pak obdobně jako u mechanického oscilátoru určujeme hodnoty proudu v posloupnosti časových kroků. Časový diagram napětí u_{C1} a u_{C2} zobrazuje rázy kmitání obou vázaných oscilátorů.

Počítačový model popsaneho děje lze vytvořit různými prostředky. Pro jednoduché modelování, které nevyžaduje znalost programovacího jazyka, jsme zvolili program Modellus 4.01 [III]. Matematické modely pro mechanické i elektromagnetické vázané oscilátory vytvořené tímto programem jsou na obr. 11. Podrobnější teoretický popis modelů viz [3].

```

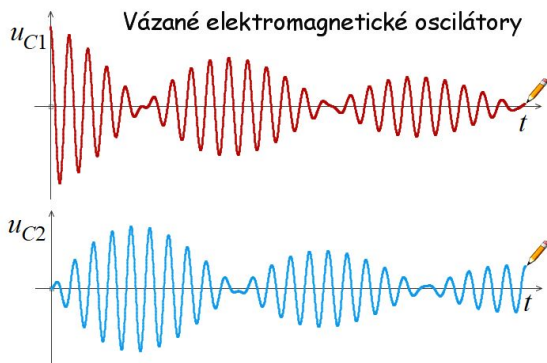
Mathematical Model
F1 = -k * y1 - b * v1 - c * ( y1 - y2 )
F2 = -k * y2 - b * v2 + c * ( y1 - y2 )
a1 = F1 / m1
a2 = F2 / m2
v2 = last( v2 ) + a2 * Δt
v1 = last( v1 ) + a1 * Δt
y1 = last( y1 ) + v1 * Δt
y2 = last( y2 ) + v2 * Δt
    
```

```

Mathematical Model
q1 = last( q1 ) + i1 * Δt
q2 = last( q2 ) + i2 * Δt
uC1 = q1 / C
uC2 = q2 / C
di1 = ( ( M * ( uR2 + uC2 ) - L * ( uR1 + uC1 ) ) ) / ( L^2 - M^2 )
di2 = ( ( M * ( uR1 + uC1 ) - L * ( uR2 + uC2 ) ) ) / ( L^2 - M^2 )
i1 = last( i1 ) + di1 * Δt
i2 = last( i2 ) + di2 * Δt
uR1 = R * i1
uR2 = R * i2
    
```

Obr. 11

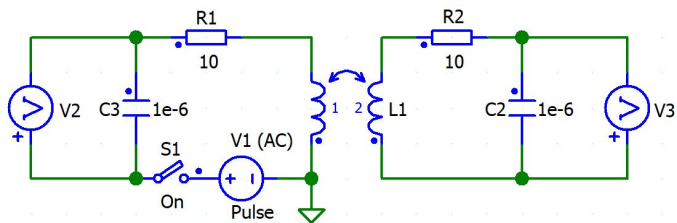
Pro ilustraci je na obr. 12 uveden výsledný časový diagram kmitání oscilátoru LC s parametry $L = 1$ H, $C = 10 \mu\text{F}$, $R = 5 \Omega$, $M = 0,1$ H (menu *Parameters*). Časový krok $h = 0,2$ ms (v programu Modellus je časový krok označen Δt), $t_{\text{max}} = 0,5$ s. Tyto hodnoty se nastavují v menu *Independent Variable*. Počáteční podmínky (*Initial Coditions*) jsou $q_1 = 10^{-4}$ C a ostatní veličiny (q_2, i_1, i_2) mají nulovou počáteční hodnotu.



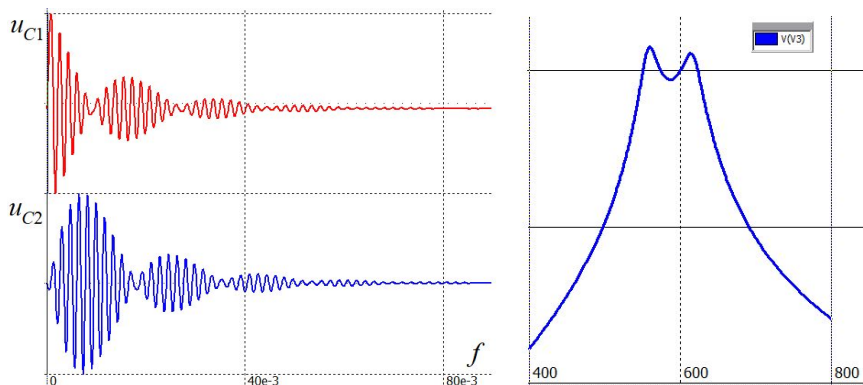
Obr. 12

Popsané modely jsou jednoduché a umožňují zkoumání dějů ve vázaných oscilátorech interaktivními změnami všech parametrů, popř. počátečních podmínek, což obvykle není možné u reálných experimentů. Je však obtížné vytvářet tímto jednoduchým postupem složitější systémy oscilátorů, jejichž popis diferenciálními rovnicemi ani není znám, nebo jejich řešení je příliš složité. Určitým problémem experimentů s vázanými oscilátory je také experimentální měření jejich frekvenční charakteristiky – *rezonanční křivky*. Prakticky nemožné je měření rezonanční křivky jednoduchých mechanických oscilátorů. U elektromagnetických oscilátorů můžeme rezonanční křivku získat klasickým měřením amplitudy kmitů při postupně rostoucí frekvenci (viz [1]). U vázaných oscilátorů toto měření ukáže, že soustava dvou vázaných oscilátorů na rozdíl od izolovaného oscilátoru má rezonanční křivku se dvěma extrémy. Tzn. vázané oscilátory mají dvě rezonanční frekvence, odpovídající symetrickému a antisymetrickému módu kmitání.

Pro studium těchto složitějších systémů vázaných elektromagnetických oscilátorů a jejich frekvenčních charakteristik můžeme využít např. simulační program NL5 Circuit Simulator [IV]. V něm snadno vytvoříme schéma obvodu kreslením přímo na ploše monitoru a ihned můžeme zobrazit jak časový diagram kmitání v daném obvodu, tak jeho frekvenční charakteristiku. Tento program byl použit k simulaci všech zapojení s vázanými elektromagnetickými oscilátory. Jako ukázka je na obr. 13 je schéma soustavy indukčně vázaných oscilátorů a na obr. 14 jsou odpovídající časové diagramy kmitání oscilátorů a frekvenční charakteristika se dvěma charakteristickými rezonančními frekvencemi.

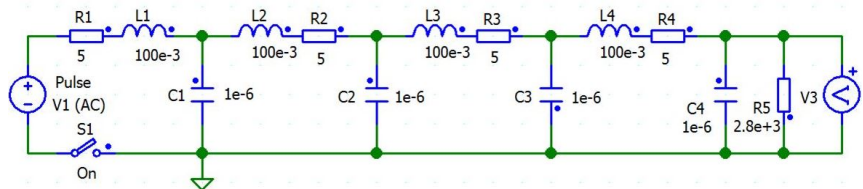


Obr. 13

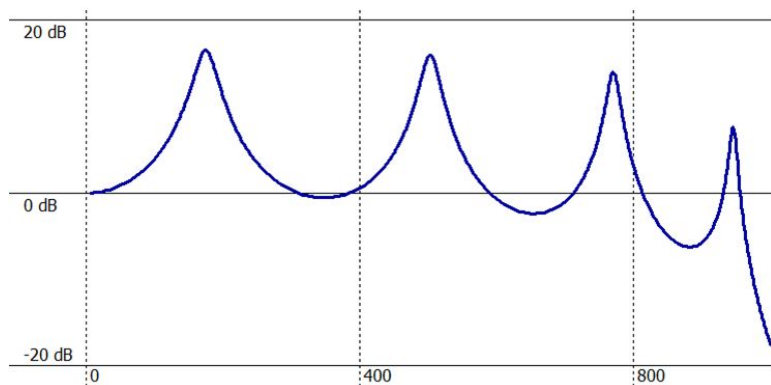


Obr. 14

Tímto programem byl také vytvořen řetězec čtyř kapacitně vázaných oscilátorů (obr. 15), jehož frekvenční charakteristika vykazuje odpovídající nárůst rezonančních maxim (obr. 16). To umožňuje při výuce dospět extrapolací tohoto případu na dlouhou řadu vázaných oscilátorů, čili k představě dvou vodičového vedení, kterým se může šířit postupná elektromagnetická vlna.



Obr. 15



Obr. 16

Literatura

- [1] Lepil, O.: Příspěvek k metodice výkladu rezonančních jevů ve vázaných oscilátorech. In: Acta UP, Fac. Rer. Nat. Tom 15, 1964. Dostupné na: <http://dml.cz/dm1cz/119814>
- [2] Lepil, O., Látal, F.: Experiment v učivu o kmitání elektromagnetického oscilátoru. MFI, roč. 22 (2013), č. 5, s. 344. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/2205/mfi_2205_344_354.pdf
- [3] Lepil, O., Richterek, L.: Dynamické modelování, Repronis, Ostrava, 2007. Dostupné na: http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni.php

Software

- [I] Tracker 4.97: <<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>>
- [II] Logger Pro 3.14.1: <<https://www.vernier.com/>>
- [III] Modellus 4.01: <<http://modellus.fct.unl.pt/>>
- [IV] NL 5 Circuit Simulator: <<http://nl5.sidelinesoft.com/>>