Metrické vlastnosti hvězdicových mnohoúhelníků

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V minulém čísle tohoto časopisu jsme se v článku [1] věnovali základním otázkám, které se váží k problematice hvězdicových mnohoúhelníků. Vůbec jsme se však nezabývali jejich metrickými vlastnostmi. Tento rest odčiníme na následujících stranách.

Přesnou definici hvězdicového n-úhelníku lze nalézt ve zmíněném textu. Zjednodušeně řečeno, *hvězdicový n-úhelník* $\{n, k\}$, kde k a n jsou přirozená čísla, $n \geq 5$, $2 \leq k < \frac{n}{2}$, vznikne takto: uvažujeme n bodů pravidelně rozmístěných na (pomyslné) kružnici a každý z nich spojíme úsečkou s jeho k-tým „sousedem“, počítáme-li body po směru hodinových ručiček. Za hvězdicový n-úhelník přitom nepovažujeme sjednocení uvedených úseček, ale část roviny, kterou ohraničí. Výchozí body nazýváme *vrcholy hvězdicového n-úhelníku*, posun z bodu na bod následující *krokem* (mezi spojenými body tedy musíme vykonat k kroků). Pokud bychom připustili $k = 1$, lze tímto způsobem získat konvexní pravidelný n-úhelník, který budeme značit $\{n, 1\}$.

Velikosti úhlů

Hvězdicový mnohoúhelník je vhodným objektem pro procvičování pojmů středový a obvodový úhel. Pomocí vztahu mezi těmito úhly příslušnými oblouku kružnice opsané hvězdicovému mnohoúhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 2$, snadno vypočítáme velikost vnitřního úhlu φ_{nk} při jeho vrcholu (obr. 1).

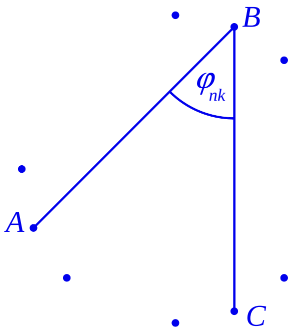
Z kontextu bude vždy zřejmé, zda mluvíme o úhlu, nebo o jeho velikosti, proto budeme v obou případech používat stejné označení, a to malá písmena řecké abecedy.

Nechť A, B a C jsou takové vrcholy hvězdicového mnohoúhelníku $\{n, k\}$, že počet kroků mezi body A, B a také mezi body B, C je k (obr. 1). Potom počet kroků mezi body C, A je $n - 2k$ a konvexní středový úhel příslušný oblouku s krajními body A, C má velikost $(n-2k) \cdot \frac{360^\circ}{n}$. Pro obvodový úhel φ_{nk} proto platí

$$\varphi_{nk} = (n-2k) \cdot \frac{180^\circ}{n}. \tag{1}$$

Součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech hvězdicového n-úhelníku je tedy

$$n \cdot (n-2k) \cdot \frac{180^\circ}{n} = (n-2k) \cdot 180^\circ.$$



Obr. 1 Vnitřní úhel φ_{nk} při vrcholu n-úhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 2$

Uvedený postup lze použít i pro vnitřní úhly pravidelného n-úhelníku $\{n, 1\}$ (mezi body C a A je $n-2$ kroků), a platí proto následující tvrzení:

Věta

Součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech n-úhelníku $\{n, k\}$ je pro libovolné $k \geq 1$ roven

$$(n-2k) \cdot 180^\circ.$$

Vypočítejme velikosti vnitřních úhlů útvarů, jimiž je pokryta plocha libovolného n-úhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 1$. Uvažujme úhly α_n, β_n, γ_n pravidelného n-úhelníku $\{n, 1\}$ podle obr. 2.

Zřejmě

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}, \qquad \beta_n = \frac{180^\circ - \alpha_n}{2} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

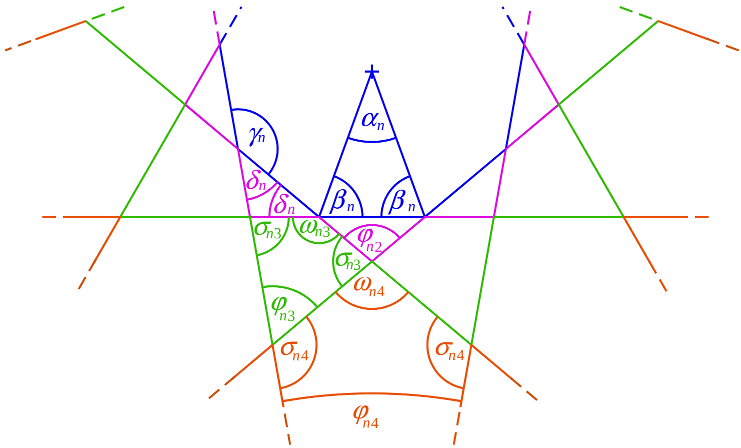
$$\gamma_n = 2\beta_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Dále určíme velikosti vnitřních úhlů rovnoramenných trojúhelníků, které vzniknou protažením stran pravidelného n-úhelníku $\{n, 1\}$ a které tedy tvoří „cípy“ hvězdicového n-úhelníku $\{n, 2\}$. Vnitřní úhly při vrcholech n-úhelníku $\{n, 2\}$ označme ve shodě s dříve zavedenou symbolikou φ_{n2} a dvojice shodných úhlů při základnách uvažovaných rovnoramenných trojúhelníků označme δ_n (obr. 2). Potom

$$\delta_n = 180^\circ - \gamma_n = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{360^\circ}{n} = \alpha_n$$

a

$$\varphi_{n2} = 180^\circ - 2\delta_n = 180^\circ - 2 \cdot \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{720^\circ}{n}.$$



Obr. 2 Úhly n-úhelníků $\{n, k\}$

Postupným dalším protahováním stran vznikají hvězdicové mnohoúhelníky $\{n, k\}$, $k \geq 3$, jejichž „cípy“ jsou tvořeny deltoidy. Jeden z vnitřních úhlů každého z deltoidů je φ_{nk}, jemu protilehlý nechť je ω_{nk}, zbývající dva shodné úhly nechť jsou σ_{nk}. Potom je jistě

$$\omega_{n3} = 180^\circ - \delta_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

a

$$\sigma_{n3} = 180^\circ - \varphi_{n2} = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{720^\circ}{n}\right) = \frac{720^\circ}{n}.$$

Pokud jsou vyjádřeny velikosti úhlů φ_{n2}, $\delta_n = \alpha_n$ a k němu vedlejšího úhlu ω_{n3}, je výpočet velikostí zbývajících úhlů velmi snadný, stačí použít následující vzorce:

$$\sigma_{nk} = 180^\circ - \varphi_{n,k-1}, \quad k \geq 3, \tag{2}$$

$$\omega_{nk} = 180^\circ - \sigma_{n,k-1} \quad \text{nebo} \quad \omega_{nk} = \varphi_{n,k-2}, \quad k \geq 4, \tag{3}$$

$$\varphi_{nk} = 360^\circ - 2\sigma_{nk} - \omega_{nk}, \quad k \geq 3. \tag{4}$$

Dosazením rovností (2) a (3) do vztahu (4) získáme jiná vyjádření velikosti úhlu φ_{nk}, $k \geq 4$:

$$\varphi_{nk} = 360^\circ - 2(180^\circ - \varphi_{n,k-1}) - (180^\circ - \sigma_{n,k-1}) = 2\varphi_{n,k-1} + \sigma_{n,k-1} - 180^\circ,$$

resp.

$$\varphi_{nk} = 360^\circ - 2\left(180^\circ - \varphi_{n,k-1}\right) - \varphi_{n,k-2} = 2\varphi_{n,k-1} - \varphi_{n,k-2}.$$

Poslední vztah je rekurentním vyjádřením velikosti vnitřního úhlu při vrcholu hvězdicového mnohoúhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 4$, odvozené z velikosti vnitřních úhlů při vrcholech hvězdicových mnohoúhelníků předchozích dvou řádů. Připomeňme, že velikost úhlu φ_{nk} bychom mohli vypočítat také využitím vzorce (1).

Obvody mnohoúhelníků $\{n, k\}$

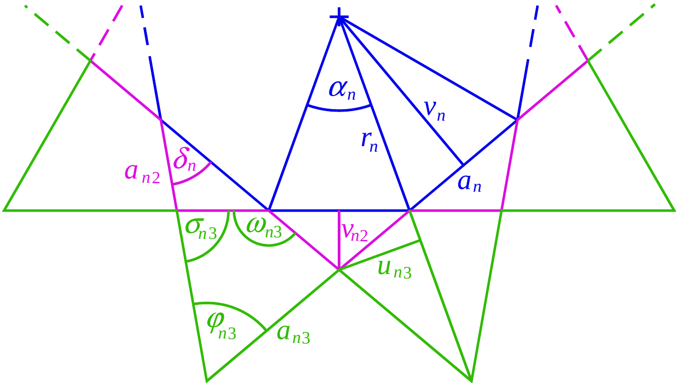
Věnujme se nyní obvodům n-úhelníků $\{n, k\}$. Délku strany pravidelného n-úhelníku $\{n, 1\}$ označme a_n a délku úsečky, která je nejkratší spojnicí vrcholu hvězdicového n-úhelníku $\{n, k\}$ s vrcholem n-úhelníku $\{n, k-1\}$, $k \geq 2$, označme a_{nk} (obr. 3). Jestliže O_{nk} je obvod n-úhelníku $\{n, k\}$, potom platí

$$O_{n1} = na_n \quad \text{a} \quad O_{nk} = 2na_{nk}, \quad k \geq 2.$$

Vyjádříme obvody O_{nk} pro $k = 2$ a $k = 3$ v závislosti na délce a_n. Pokud chceme získat závislost obvodu O_{nk} na poloměru r_n kružnice opsané pravidelnému n-úhelníku $\{n, 1\}$, odvodíme ze vztahů

$$\sin\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\frac{a_n}{2}}{r_n}, \qquad \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180^\circ}{n}$$

závislost
$$a_n = 2r_n \sin\frac{180^\circ}{n},$$
kterou do dále získaných výsledků za a_n dosadíme.



Obr. 3 Používané značení

Nejprve vyjádříme závislost délky a_{n2} na délce a_n. Jelikož
$$\cos\delta_n = \frac{\frac{a_n}{2}}{a_{n2}} \qquad \text{a} \qquad \delta_n = \frac{360^\circ}{n},$$
je
$$a_{n2} = \frac{a_n}{2\cos\dfrac{360^\circ}{n}}. \tag{5}$$
Odtud vyplývá
$$O_{n2} = 2na_{n2} = \frac{na_n}{\cos\dfrac{360^\circ}{n}}.$$

Nyní vyjádříme délku a_{n3} v závislosti na délce a_n a následně vypočítáme obvod O_{n3}. Délku poloviny vedlejší úhlopříčky deltoidu, který tvoří „cíp“ hvězdicového n-úhelníku $\{n, 3\}$, označme u_{n3} (obr. 3). Potom
$$\sin\frac{\omega_{n3}}{2} = \frac{u_{n3}}{a_{n2}}, \qquad \text{kde} \quad \omega_{n3} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

a proto je s přihlédnutím k rovnosti (5) a vztahu mezi funkcemi sinus a kosinus

$$u_{n3} = \frac{a_n \sin\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right)}{2\cos\dfrac{360^\circ}{n}} = \frac{a_n \cos\dfrac{180^\circ}{n}}{2\cos\dfrac{360^\circ}{n}}. \tag{6}$$

Dále platí

$$\sin\frac{\varphi_{n3}}{2} = \frac{u_{n3}}{a_{n3}},$$

a tedy

$$a_{n3} = \frac{u_{n3}}{\sin\dfrac{\varphi_{n3}}{2}}. \tag{7}$$

Jelikož je podle (1)

$$\varphi_{n3} = (n - 2\cdot 3)\cdot\frac{180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{n}, \tag{8}$$

získáme dosazením (6) a (8) do rovnosti (7) a užitím vztahu mezi funkcemi sinus a kosinus

$$a_{n3} = \frac{a_n \cos\dfrac{180^\circ}{n}}{2\cos\dfrac{360^\circ}{n}\sin\left(90^\circ - \dfrac{540^\circ}{n}\right)} = \frac{a_n \cos\dfrac{180^\circ}{n}}{2\cos\dfrac{360^\circ}{n}\cos\dfrac{540^\circ}{n}}. \tag{9}$$

Nyní je vyjádření obvodu O_{n3} v závislosti na a_n trivialita:

$$O_{n3} = 2na_{n3} = \frac{na_n \cos\dfrac{180^\circ}{n}}{\cos\dfrac{360^\circ}{n}\cos\dfrac{540^\circ}{n}}.$$

Obsahy mnohoúhelníků $\{n, k\}$

Nakonec vyjádříme obsahy S_{n1}, S_{n2} a S_{n3} mnohoúhelníků $\{n, k\}$ pro $k = 1, 2, 3$.

Jestliže v_n značí vzdálenost středu kružnice opsané pravidelnému n-úhelníku a strany tohoto n-úhelníku (obr. 3), je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\frac{a_n}{2}}{v_n}.$$

Odtud vyplývá

$$v_n = \frac{a_n \operatorname{cotg}\dfrac{180^\circ}{n}}{2},$$

a proto je obsah S_{n1} pravidelného n-úhelníku $\{n,1\}$

$$S_{n1} = n \cdot \frac{a_n v_n}{2} = \frac{n a_n^2 \operatorname{cotg}\dfrac{180^\circ}{n}}{4}. \tag{10}$$

Značí-li v_{n2} vzdálenost vrcholu hvězdicového n-úhelníku $\{n,2\}$ od nejbližší strany pravidelného n-úhelníku $\{n,1\}$ (obr. 3), je obsah S_{n2} n-úhelníku $\{n,2\}$

$$S_{n2} = S_{n1} + n \cdot \frac{a_n v_{n2}}{2}. \tag{11}$$

Ze vztahů

$$\operatorname{tg}\delta_n = \frac{v_{n2}}{\frac{a_n}{2}} \qquad \text{a} \qquad \delta_n = \frac{360^\circ}{n}$$

plyne

$$v_{n2} = \frac{a_n}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{360^\circ}{n},$$

což spolu se vztahy (10) a (11) implikuje

$$S_{n2} = \frac{n a_n^2 \operatorname{cotg}\dfrac{180^\circ}{n}}{4} + \frac{n a_n \dfrac{a_n}{2} \operatorname{tg}\dfrac{360^\circ}{n}}{2} = \frac{n a_n^2}{4}\left(\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n} + \operatorname{tg}\frac{360^\circ}{n}\right). \tag{12}$$

Obsah S_{n3} hvězdicového mnohoúhelníku $\{n, 3\}$ je součtem obsahu S_{n2} mnohoúhelníku $\{n, 2\}$ a obsahů n deltoidů, jejichž strany mají délky a_{n2} a a_{n3}. Tyto deltoidy jsou svými hlavními úhlopříčkami rozděleny na shodné trojúhelníky a obsah S_t každého z nich je

$$S_t = \frac{1}{2} a_{n_2} a_{n_3} \sin \sigma_{n3} = \frac{1}{2} a_{n_2} a_{n_3} \sin \frac{720^\circ}{n}. \tag{13}$$

Vzhledem k (12), (13), (5) a (9) je obsah n-úhelníku $\{n, 3\}$

$$\begin{aligned} S_{n3} = S_{n2} + 2nS_t = S_{n2} + n a_{n_2} a_{n_3} \sin \frac{720^\circ}{n} = \\ = \frac{n a_n^2}{4} \left(\operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n} + \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n} \right) + \\ + n \cdot \frac{a_n}{2 \cos \frac{360^\circ}{n}} \cdot \frac{a_n \cos \frac{180^\circ}{n}}{2 \cos \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{540^\circ}{n}} \cdot \sin \frac{720^\circ}{n}. \end{aligned}$$

Tento vztah dále zjednodušíme. Použijeme přitom opakovaně vzorec pro sinus dvojnásobného úhlu, hodnotu $\frac{540^\circ}{n}$ vyjádříme jako součet $\frac{360^\circ}{n} + \frac{180^\circ}{n}$ a aplikujeme součtový vzorec pro funkci kosinus:

$$S_{n3} = \frac{n a_n^2}{4} \left(\operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n} + \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n} + \frac{\cos \frac{180^\circ}{n} \cdot 2 \sin \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{360^\circ}{n}}{\cos^2 \frac{360^\circ}{n} \cos \left(\frac{360^\circ}{n} + \frac{180^\circ}{n} \right)} \right) =$$

$$\begin{aligned} = \frac{n a_n^2}{4} \Bigg(\operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n} + \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n} + \\ + \frac{\cos \frac{180^\circ}{n} \cdot 2 \sin \frac{360^\circ}{n}}{\cos \frac{360^\circ}{n} \left(\cos \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} - \sin \frac{360^\circ}{n} \sin \frac{180^\circ}{n} \right)} \Bigg) = \end{aligned}$$

$$= \frac{na_n^2}{4}\left(\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n} + \operatorname{tg}\frac{360^\circ}{n} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{tg}\frac{360^\circ}{n} \cdot \frac{2\cos\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{360^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n} - 2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}\sin\frac{180^\circ}{n}}\right) =$$

$$= \frac{na_n^2}{4}\left[\operatorname{cotg}\frac{180^\circ}{n} + \operatorname{tg}\frac{360^\circ}{n}\left(1 + \frac{2}{\cos\frac{360^\circ}{n} - 2\sin^2\frac{180^\circ}{n}}\right)\right].$$

Závěr

Domníváme se, že výše uvedené vztahy zvládnou odvodit i nadaní středoškolští studenti. Při výpočtech si procvičí především vztahy mezi velikostmi různých úhlů a zopakují poznatky z goniometrie.

Literatura

[1] *Štěpánová, M.*: Hvězdicové mnohoúhelníky. Matematika–fyzika–informatika, roč. 27 (2018), č. 1, s. 13–22.