Zlatý řez v jedné úloze 67. MO

ZBYNĚK VRBA

Gymnázium Český Krumlov

Tento příspěvek je určen především učitelům matematiky na středních školách, kteří se podílejí na přípravě svých žáků na matematické soutěže, zejména pak na Matematickou olympiádu (MO). Jeho cílem je poukázat na neočekávanou souvislost jedné z úloh domácí části I. kola v kategorii B aktuálního 67. ročníku MO s tzv. *zlatým řezem*. Při samostatném řešení nebo studiu úloh domácí části I. kola MO si učitel také často uvědomí další souvislosti a může se tak lépe připravit na případné žákovské (řešitelské) dotazy k jednotlivým úlohám. Vlastní učitelova řešení těchto úloh se mnohdy liší (to je mj. i zkušenost autora článku) od řešení žákovských, popř. i řešení vzorových (autorských). Při tomto způsobu seznámení se s problematikou soutěžních úloh se mnohdy učiteli podaří objevit další dimenze zadané úlohy. V letošním 67. ročníku MO tuto úlohu sehrává např. soutěžní úloha B–I–3 (3. úloha domácí části I. kola):

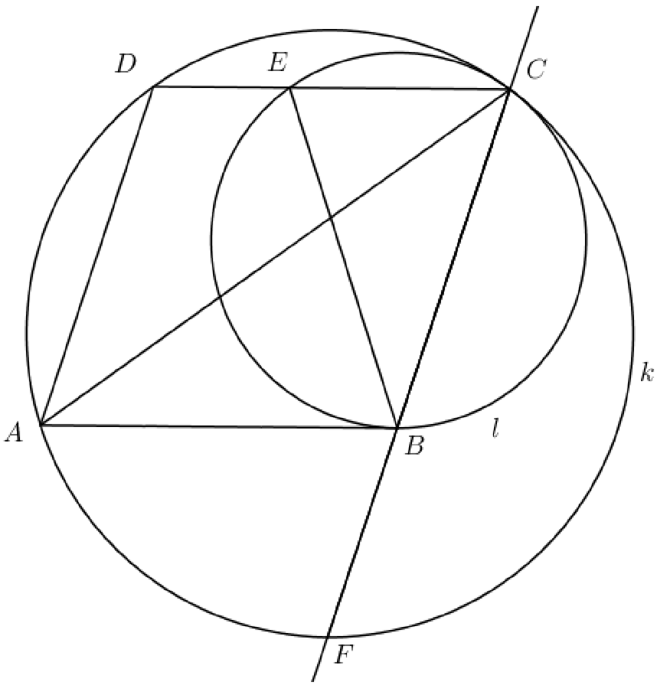
Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD. Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A, mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod (obr. 1).

Vzhledem k tomu, že cílem této určovací úlohy je nalézt velikost jistého úhlu, je zřejmé, že pokud úloze vyhovuje některý kosočtverec, pak jí vyhovují i všechny kosočtverce s ním podobné. Můžeme tak bez újmy na obecnosti předpokládat, že strana kosočtverce $ABCD$ má délku 1. Dále předpokládejme, že existuje řešení, které vyhovuje zadání, tj. existují dvě kružnice k a l podle zadání, které mají právě jeden společný bod. Tímto bodem je podle zadání vrchol kosočtverce C. Kružnice k, l v něm proto mají vnitřní dotyk.

Dokážeme nejprve následující tvrzení:

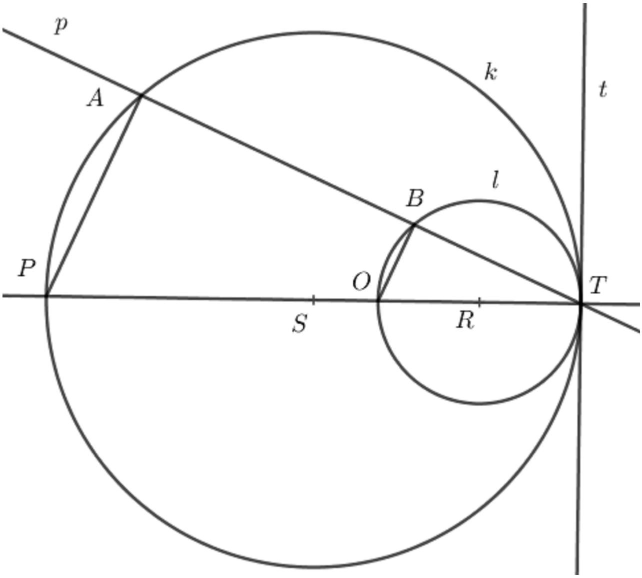
Lemma

Nechť $k(S, r_1), l(R, r_2), r_1 > r_2$ jsou kružnice, které mají vnitřní dotyk v bodě T. Potom existuje stejnolehlost $K(T, r_2/r_1)$, v níž je kružnice l obrazem kružnice k.



Obr. 1

Důkaz: Protože bod T je společným bodem obou kružnic k, l, je také tečna t v bodě T společnou tečnou kružnic k, l. Tato tečna je kolmá jak na přímku TR, tak na přímku TS. Proto body T, S, R leží v jedné přímce. Označme P druhý průsečík přímky TS s kružnicí k a O průsečík přímky TS s kružnicí l. Uvažujme libovolnou přímku p takovou, že $T \in p$, různou od přímky TS, která protíná kružnici k v bodě A a kružnici l v bodě B. Protože TP je průměr kružnice k, je úhel u vrcholu A v trojúhelníku PTA pravý. Z analogického důvodu je pravý i úhel při vrcholu B v trojúhelníku OTB. Úhel při vrcholu T je společný oběma trojúhelníkům. Trojúhelníky PTA a OTB jsou tedy podobné podle věty *uu*. Koeficient podobnosti těchto trojúhelníků je roven poměru průměrů těchto kružnic a tedy i poměru jejich poloměrů. Je tak dokázáno, že existuje stejnolehlost $K(T, r_2/r_1)$, ve které je kružnice l obrazem kružnice k. Dále je zřejmé, že mezi oběma kružnicemi existuje ještě jedna stejnolehlost $K'(T, r_1/r_2)$, která zobrazuje kružnici l na kružnici k (obr. 2).



Obr. 2

V případě úlohy B–I–3 to znamená, že existuje stejnolehlost se středem v bodě C a koeficientem κ, která zobrazuje zobrazuje kružnici k na kružnici l. V této stejnolehlosti tudíž, platí:

$$l \longrightarrow k,$$

$$E \longrightarrow D,$$

$$B \longrightarrow F.$$

Pro koeficient κ této stejnolehlosti platí

$$\kappa = \frac{|CD|}{|CE|} = \frac{|CF|}{|CB|}.$$

Lichoběžník $ABED$ je rovnoramenný, neboť je tětivový (bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD). Tedy $|AD| = |BE| = |BC| = 1$, a proto trojúhelník CBE je rovnoramenný se základnou CE.

Dále je zřejmé, že čtyřúhelník $AFCD$ je rovněž tětivový. Vzhledem k tomu, že $AD \parallel BC$ ($ABCD$ je kosočtverec) a $F \in BC$, jedná se o lichoběžník, který je opět rovnoramenný, proto

$$|AF| = |AB| = |BC| = 1$$

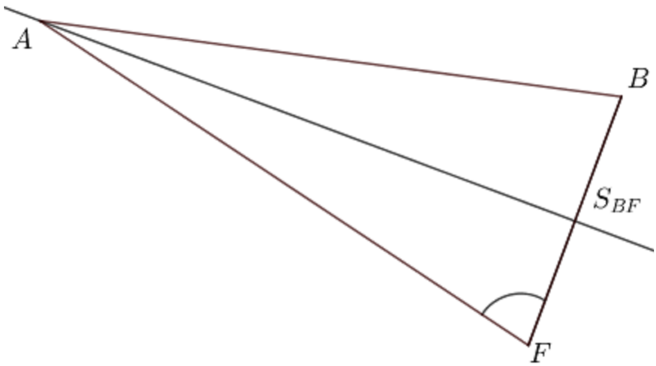
a úhly u vrcholů F a C jsou v tomto lichoběžníku shodné. Trojúhelník FAB je tak shodný s trojúhelníkem CBE (podle věty *sus*). Úhly při vrcholech C a F mají stejnou velikost jako hledaný úhel. Velikost těchto úhlů vyjádříme z trojúhelníků FAB a CBE pomocí funkce kosinus.

Nyní se zaměříme na trojúhelník BFA (obr. 3). Tento trojúhelník je rovnoramenný, a proto jeho těžnice k základně je zároveň jeho výškou. Úsečka BF má tedy délku

$$|BF| = |CF| - |BC| = \kappa - 1.$$

Označme ve shodě s obrázkem S_{BF} střed základny BF. Trojúhelník AFS_{BF} je pravoúhlý, tudíž platí

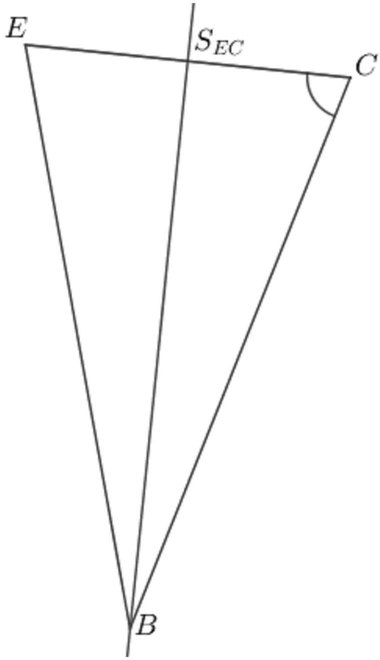
$$\cos|\sphericalangle S_{BF}FA| = \frac{|FS_{BF}|}{|AF|} = \frac{\frac{1}{2}|BF|}{1} = \frac{\kappa - 1}{2}$$



Obr. 3

V trojúhelníku BCE (obr. 4) má úhel při vrcholu C stejnou velikost, jako úhel při vrcholu F v trojúhelníku BFA. Úsečka CE má délku $1/\kappa$, její střed označme S_{EC}. V pravoúhlém trojúhelníku BCS_{EC} tak pro vnitřní úhel při vrcholu C platí

$$\cos|\sphericalangle BCS_{EC}| = \frac{\frac{1}{2\kappa}}{|BC|} = \frac{1}{2\kappa}$$



Obr. 4

Z trojúhelníku BFA (obr. 3) známe hodnotu

$$\cos|\sphericalangle S_{BF}FA| = \frac{\kappa - 1}{2}.$$

Zbývá tedy vyřešit rovnici

$$\frac{1}{2\kappa} = \frac{\kappa - 1}{2}.$$

Protože $\kappa \neq 0$, je tato rovnice ekvivalentní s kvadratickou rovnicí

$$\kappa^2 - \kappa - 1 = 0$$

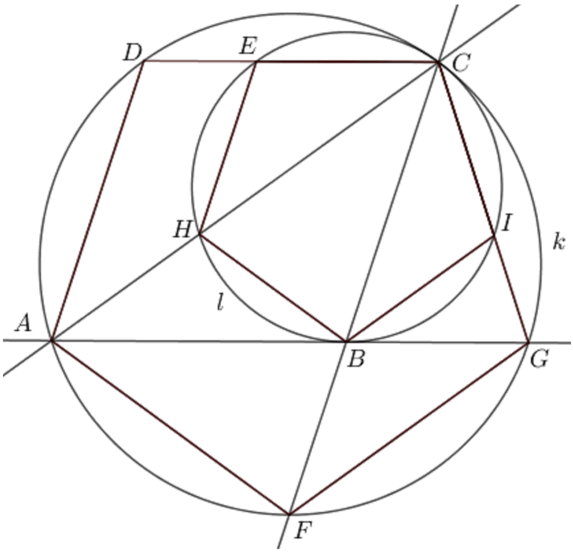
jejímž kladným kořenem, který hledáme, je pouze

$$\kappa = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pro hodnotu $\cos|\sphericalangle S_{BF}FA|$ tedy platí vztah

$$\cos|\sphericalangle S_{BF}FA| = \frac{1}{2\kappa} = \frac{1}{2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Funkce kosinus nabývá hodnotu $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ pro ostrý úhel 72°. V úloze se tak nečekaně objevuje poměr zlatého řezu.



Obr. 5

Závěr

Uvedené zjištění vede k dalšímu zajímavému důsledku:

Průsečík přímky AB s kružnicí k (označme ho například G) doplní lichoběžník $AFCD$ na pravidelný pětiúhelník $AFGCD$ s opsanou kružnicí k (obr. 5). Bod B je totiž průsečíkem jeho úhlopříček AG a CF. Pro bod G tedy platí $|CG| = |FG| = |AB| = 1$. Vzhledem k tomu, že bod E je v této stejnolehlosti vzorem bodu D, existuje pravidelný pětiúhelník, který má stranu délky CE a jeho vrcholy leží na kružnici k. Bod B je jeho vrcholem. Dalším z jeho vrcholů je průsečík H úhlopříčky AC s kružnicí l a také průsečík I přímky CG s kružnicí l.