

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 241 a 242 můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 1. června 2018, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 243

Petr chce na kalkulačce, která umí jen sčítat, odčítat, násobit a dělit, vypočítat $\log_{50} 140$. Jak má postupovat, když zná čísla $a = \log_{20} 40$ a $b = \log_8 35$?

Stanislav Trávníček

Úloha 244

Najdete všechny uspořádané dvojice přirozených čísel, jejichž nejmenší společný násobek je o 2018 větší než jejich největší společný dělitel.

Aleš Kobza

Dále uvádíme řešení úloh 239 a 240, jejichž zadání najdete v závěrečném (pátém) čísle minulého (25.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 239

Označme M střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC a F patu kolmice z bodu M na stranu BC . Přímka ℓ je kolmá k AF a prochází bodem C . Dokažte, že přímka ℓ prochází středem úsečky MF .

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení podle Jozefa Mészároše. Označme P průsečík přímky ℓ s přímkou AF . Uvažujme dále patu D kolmice z bodu A na přímkou BC . Trojúhelníky ABD a MBF jsou podobné, protože se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu B a v pravých úhlech při vrcholech D a F . Jelikož je M střed strany AB , je tak F střed úsečky BD . Úsečka MF je výškou pravoúhlého trojúhelníku BMC , tedy trojúhelník MBF je dále podobný s trojúhelníkem CMF . Trojúhelník ABD je tak podobný s trojúhelníkem CMF .

kde p_i jsou navzájem různá prvočísla a α_i přirozená čísla. Počet dělitelů čísla n je pak roven

$$\tau(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_s).$$

Číslo $\tau(n)$ bude přitom liché, právě když všechna čísla α_i budou sudá, tedy právě když n bude druhou mocninou přirozeného čísla.

Protože

$$44^2 = 1936 < 2017 < 2025 = 45^2,$$

bude součet všech čísel na kartách obrácených lícem nahoru po 2017 krocích roven

$$1^2 + 2^2 + \dots + 44^2 = \frac{44 \cdot 45 \cdot 89}{6} = 29\,370.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek