

Experimentální ověření rovnováhy atmosférického tlaku a hydrostatického tlaku ve válci

ČENĚK KODEJŠKA¹ – JAN ŘÍHA¹ – SALVATORE GANCI²

¹Katedra experimentální fyziky, Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého

²Studio di Catalogazione e Conservazione Strumenti Scientifici, Casarza Ligure, GE, Italy

Úvod

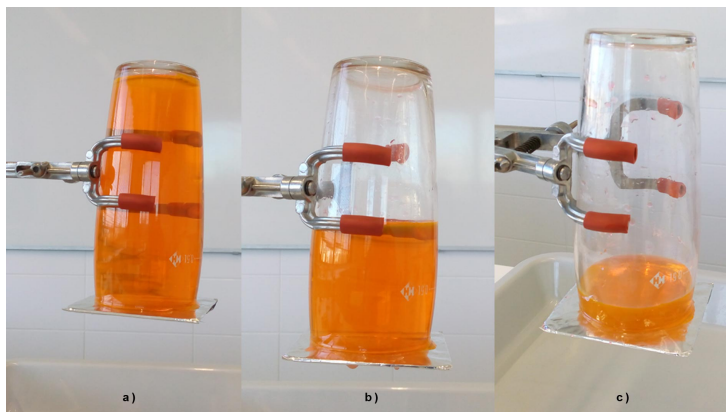
Ačkoliv moderní zahraniční literatura [1, 2] popisuje hydrostatický paradox způsobem známým i v našich českých učebnicích fyziky [3], tedy jako jev, kdy různé množství kapaliny v nádobách různých tvarů působí při stejné výšce kapaliny v každé nádobě na stejnou plochu dna nádoby stejnou hydrostatickou silou, někteří autoři, spojují název tohoto jevu i s tlakovou silou vzduchu působící zespodu na papírovou destičku uzavírající kapalinu ve válcové nádobě [4].

Experiment s převrácenou sklenicí zcela naplněnou vodou, zdola uzavřenou listem papíru, patří k efektním motivačním experimentům učitele fyziky. Žáci zcela zaujme skutečnost, že voda, ač je těžší než vzduch, ze sklenice nevyteče (obr. 1a). Obvyklé vysvětlení tohoto jevu spočívá v porovnání velikosti hydrostatického tlaku sloupce vody v nádobě ($p_h \doteq 10^2$ Pa) a atmosférického tlaku působícího vně na papír ($p_a \doteq 10^5$ Pa).

Většina učitelů fyziky ale z vlastní zkušenosti dobře ví, že experiment lze úspěšně provést i v případě, že nádoba bude naplněna obarvenou vodou pouze částečně, aniž by došlo k jejímu vylití, obr. 1b) a 1c). Vysvětlení rovnováhy mezi atmosférickým tlakem působícím vně nádoby a tlakovými

poměry uvnitř nádoby už není zcela triviální, protože uvnitř nádoby se sčítá hydrostatický tlak sloupce kapaliny s tlakem vzduchu v prostoru nad kapalinou.

Zásadní otázka tedy zní: Jak velký je tento tlak a jak lze tedy v tomto případě vysvětlit, že nedojde k odtržení papírové destičky ode dna nádoby? Žáci středních škol i vysokoškolští studenti fyziky jsou totiž přesvědčeni o tom, že tlak vzduchu nad kapalinou je roven tlaku atmosférickému. Druhá kardinální otázka je, zda můžeme tyto teoretické předpoklady experimentálně ověřit.

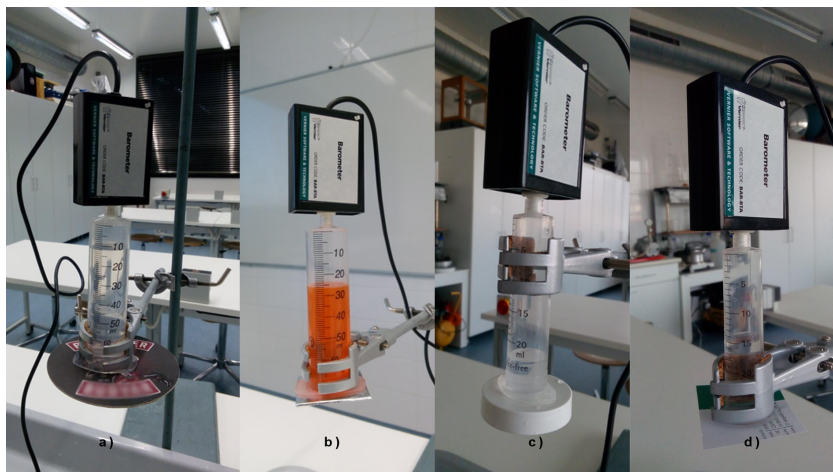


Obr. 1 Zcela plná, poloplná a téměř prázdná nádoba při demonstraci tlaku vzduchu

Teoretické odvození vztahu pro tlak vzduchu uzavřeného v nádobě

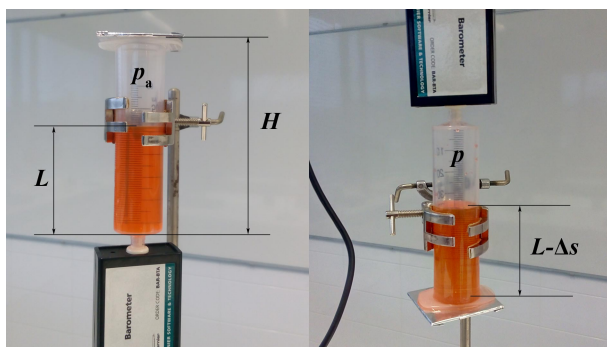
Někteří autoři se při vysvětlení tohoto fenoménu opírají o skutečnost, že zejména u běžného listu papíru (obr. 2d) dojde tlakem kapaliny k jeho deformaci, což se projeví snížením tlaku nad hladinou [5], [6, s. 12]. Nicméně, jakkoli je toto vysvětlení správné v tomto konkrétním případě, nemůže obstát při použití tvrdé papírové destičky impregnované hydrofobním nanesením (obr. 2a), obalené hliníkovou fólií (obr. 2b) nebo použijeme-li plastové víčko (obr. 2c). Jiní autoři vysvětlují nepatrné zvětšení prostoru nad kapalinou působením tíhy sloupce kapaliny [7, 8].

Ať již je příčinou změny objemu vzduchu nad kapalinou cokoliv, bez této změny by nebylo možné tento jev pozorovat, jak bude ukázáno v následujících odstavcích textu.



Obr. 2 Různé typy destiček: a) impregnovaný tuhý papír, b) tuhý papír obalený hliníkovou fólií, c) plastové víčko d) list papíru

Obr. 3 ukazuje dvě situace. Vlevo je nádoba postavená na své dno a shora přikrytá destičkou. Tlak vzduchu uvnitř nádoby je v tomto případě roven atmosférickému tlaku a výška kapaliny v nádobě je L . V pravé části obrázku je situace opačná. Nádoba je převrácená dnem vzhůru a výška sloupce kapaliny L se zmenší o velice malou výšku Δs . Značení bylo zachováno v souladu s [4]. Výška kapaliny je tedy rovna $(L - \Delta s)$. V této teoretické části nebudeme rozebírat příčiny tohoto poklesu a vysvětlení ponecháme do části 3.



Obr. 3 Zvýšení objemu a snížení tlaku p (vpravo) oproti atmosférickému tlaku p_a (vlevo)

Podmínky rovnováhy v situaci na obr. 1b) plynou ze dvou rovnic: rovnice (1) pro izotermický děj a rovnosti atmosférického tlaku vně nádoby a součtu tlaků uvnitř nádoby (2):

$$p_a V = p(V + S\Delta s) \quad (1)$$

$$p_a = p + (L - \Delta s)\rho g \quad (2)$$

Označíme-li výšku nádoby H a za předpokladu stejného průřezu celé nádoby, kdy platí $V = Sh$, můžeme vztah (1) přepsat na následující vztah:

$$p_a(H - L) = p(H - L + \Delta s) \quad (3)$$

Dosazením do rovnice (2) za tlak p vyjádřený z rovnice (3) a po úpravách získáme následující vztah pro Δs :

$$\Delta^2 s + \left(\frac{p_a}{\rho g} + H - 2L \right) \Delta s - L(H - L) = 0 \quad (4)$$

Protože výraz $\Delta s \doteq 10^{-4}$ m, můžeme výraz $\Delta^2 s \doteq 10^{-8}$ m² oproti ostatním členům rovnice zanedbat a získáme výsledný vztah (5), který odvodil Ganci v [3]:

$$\Delta s = \frac{L(H - L)}{\frac{p_a}{\rho g} + H - 2L} \quad (5)$$

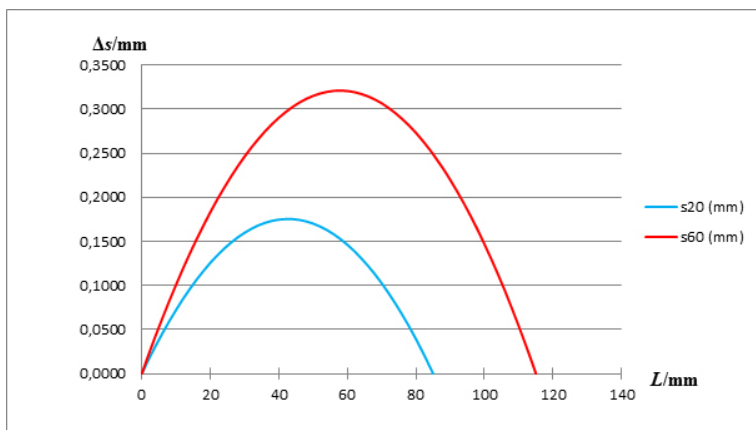
Jak ukazuje obr. 4, je teoretická závislost Δs na výšce L kvadratická funkce s maximem pro $L = H/2$, přičemž $H = 85$ mm pro modrou křivku, resp. $H = 115$ mm pro červenou.

Pokud z rovnic (2) a (3) vyjádříme závislost tlaku vzduchu p v prostoru nad kapalinou na výšce L , získáme následující rovnici:

$$p^2 - (p_a - H\rho g)p - \rho g p_a(H - L) = 0 \quad (6)$$

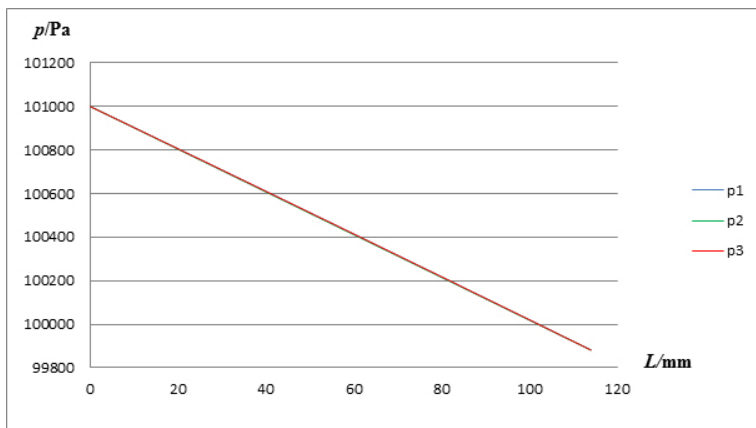
Rovnici (6) můžeme přepsat do tvaru (7), který odpovídá vrcholové rovnici paraboly:

$$\left(p - \frac{p_a - H\rho g}{2} \right)^2 = -\rho g p_a \left[L - \left(H + \frac{(p_a - H\rho g)^2}{4\rho g p_a} \right) \right] \quad (7)$$



Obr. 4 Graf závislosti poklesu kapaliny Δs na výšce kapalinového sloupce L pro nádobu o objemu 20 ml (modrá křivka) a nádobu o objemu 60 ml (červená křivka) podle vztahu (5)

Vrchol V této paraboly má souřadnice $V \left[H + \frac{(p_a - H \rho g)^2}{4 \rho g p_a}; \frac{p_a - H \rho g}{2} \right]$, konkrétně po dosazení hodnot je to $V[2,632 \text{ m}; 49\,936 \text{ Pa}]$, což je mimo interval měřených hodnot. Měřené hodnoty se pak ve skutečnosti nachází v intervalu, kde lze průběh funkce považovat za lineární, jak je vidět na obr. 5.



Obr. 5 Teoretická závislost tlaku p vzduchu nad kapalinou na výšce sloupce kapaliny L

Exaktní řešení kvadratické rovnice (6) dává mocninnou závislost tlaku p na výšce L , jak plyne z následujícího vztahu:

$$p = \frac{\sqrt{p_a^2 + 2H\rho g p_a - 4\rho g p_a L + (H\rho g)^2} + p_a - H\rho g}{2} \quad (8)$$

Vztah (8) může být upraven a zjednodušen za předpokladu, že platí $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ pro $x \ll 1$, na lineární tvar (9)

$$p \cong p_a - \rho g L + \frac{1}{4} \frac{(H\rho g)^2}{p_a}, \quad (9)$$

kteřý koresponduje s rovnicí (2). Porovnáním obou rovnic zjistíme, že platí vztah

$$\Delta s_{\max} = \frac{1}{4} \frac{H^2 \rho g}{p_a}, \quad (10)$$

odpovídající vztahu (5) pro $L = H/2$. Jak si lze povšimnout, vztah (10) pro pokles hladiny Δs je nezávislý na výšce kapalinového sloupce L a hodnotou odpovídá maximálnímu možnému poklesu Δs .

Obr. 5 znázorňuje grafickou závislost tlaku p_1 na výšce L podle rovnice (2), do které je za Δs dosazeno ze vztahu (5), tlaku p_2 podle vztahu podle rovnice (2) se zanedbáním Δs ($\Delta s = 0$) a tlaku p_3 podle vztahu (8). Vidíme, že všechny křivky jsou téměř identické. Výpočtem bylo ověřeno, že hodnoty tlaku p se v těchto třech modelech liší maximálně v jednotkách pascalů. Výpočty byly provedeny pro tyto konstanty: $p_a = 101\,000$ Pa, $g = 9,81$ m·s⁻², $\rho = 1\,000$ kg·m⁻³, $H = 0,115$ m.

Experimentální ověření a naměřená data

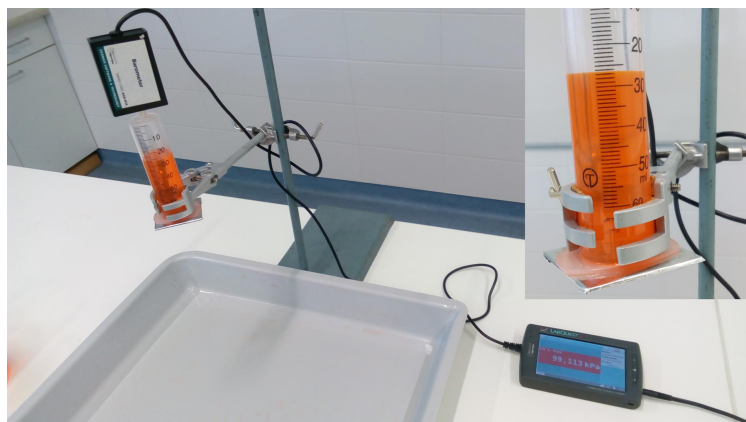
Základní otázkou při návrhu experimentu bylo, jakým způsobem můžeme vůbec změřit tlak v uzavřené nádobě nad hladinou kapaliny. K měření jsme nakonec využili tlakoměr od firmy Vernier a plastové injekční stříkačky o objemu 20 ml a 60 ml. Hlavním úkolem bylo ověřit teoretické závislosti popsané ve výše uvedených rovnicích (5) a (8), zjistit, zda je měření významně ovlivněno průměrem nádoby a jaká existují limitní omezení při použití různých typů destiček o různých hmotnostech.

Použití injekčních stříkaček různého objemu a průměru vyplynulo nakonec přirozeně ze skutečnosti, že tyto stříkačky mají válcový tvar a dají se připojit přímo k měřiči tlaku, jak je vidět na obr. 6.



Obr. 6 Připojení injekční stříkačky k tlakoměru Vernier

Výšku hladiny kapaliny ve stříkačce (dále jen v nádobě) jsme určovali pomocí posuvného měřidla s přesností na jednotky mm. Celkové uspořádání experimentu je na obr. 7 s detailem destičky v pravém horním rohu obrázku.

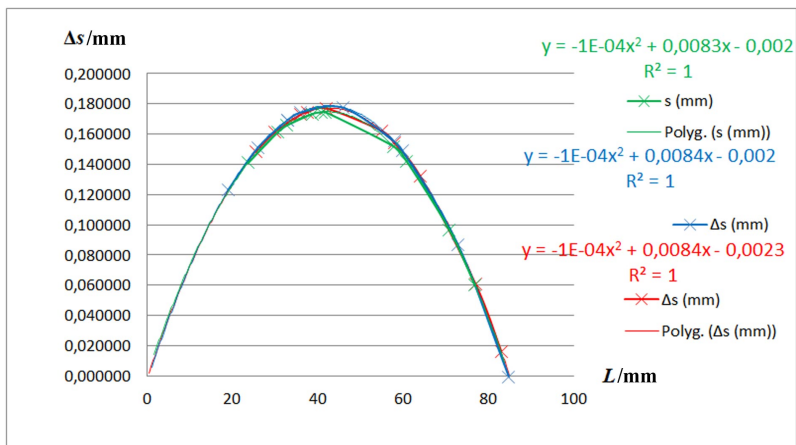


Obr. 7 Uspořádání experimentu s detailem na destičku

Měření bylo provedeno tak, že jsme změřili nejprve hodnotu atmosférického tlaku v prázdné nádobě, pak jsme do nádoby nalili určité množství vody, uzavřeli shora destičkou, obrátili o 180° a změřili tlak vzduchu v uzavřeném prostoru nad kapalinou.

Tabulka 1 Hodnoty tlaku vzduchu p v závislosti na výšce kapaliny L v nádobě o objemu 20 ml

Papír s hliníkovou fólií			Plastové víčko			Papír		
$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$
99,961	99,172	83	100,437	99,771	88	101,220	99,907	77
99,995	99,296	77	100,618	100,015	60	101,222	100,810	42
100,041	99,394	64	100,654	100,286	36	101,222	100,400	71
100,063	99,498	55	100,675	100,300	33	101,220	100,575	61
100,041	99,620	42	100,722	100,423	19	101,221	100,790	41
100,028	99,630	38	100,675	99,923	73	101,215	100,895	31
99,996	99,691	30	100,682	100,082	58	101,210	100,872	33
99,987	99,626	36	100,716	100,230	46	101,272	100,973	24
99,989	99,730	26	100,689	100,325	33	101,276	100,635	58
99,982	99,412	58	100,661	100,340	27	101,230	100,769	39



Obr. 8 Graf závislosti poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L podle tabulky 1

Experiment byl proveden pro vodu, která byla pro větší názornost obarvena, a jako destička byly v případě nádoby o objemu 20 ml postupně použity plastové víčko, tuhý papír obalený hliníkovou fólií a obyčejný papír.

Pro úplnost uvedme i hmotnosti jednotlivých typů destiček podle rostoucí hmotnosti: tuhý papírový čtverec o straně 5 cm obalený hliníkovou fólií o hmotnosti 1,9 g, plastové víčko o hmotnosti 2,7 g, impregnovaný papír o hmotnosti 5,5 g.

Tabulka 1 uvádí naměřené hodnoty tlaku vzduchu p nad kapalinou pro nádobu o objemu 20 ml pro danou výšku kapaliny L a výšku $H = 90$ mm, tabulka 2 uvádí analogicky hodnoty pro nádobu o objemu 60 ml a výšku $H = 115$ mm.

Na obr. 8 jsou zobrazeny získané hodnoty Δs v závislosti na výšce L podle vztahu (5) a tabulky 1. Červená křivka odpovídá použití tuhého papíru obaleného hliníkovou fólií, modrá křivka odpovídá plastovému víčku a zelená obyčejnému papíru. Zatímco červená a modrá se téměř identicky překrývají, zelená křivka se v oblasti maxima kvadratické funkce mírně liší od ostatních dvou.

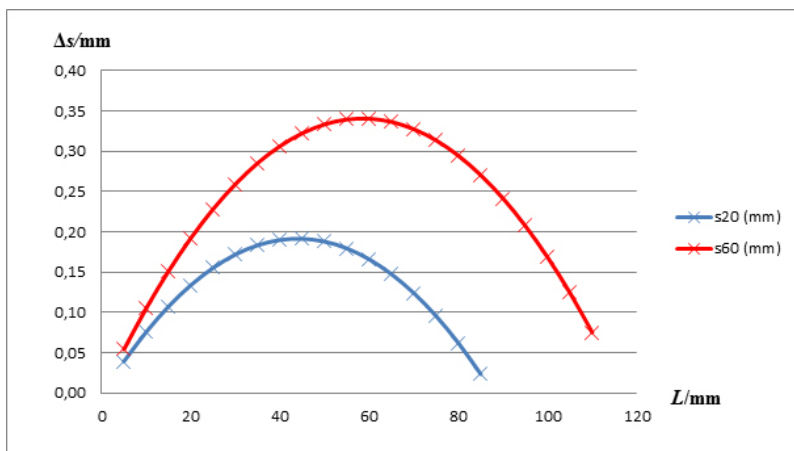
Statistická analýza pomocí dvouvýběrového t-testu s rovností rozptylů v programu MS Excel nicméně prokázala platnost nulové hypotézy, tj. že na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$ se hodnoty Δs při vzájemném porovnání dvou souborů hodnot (hliník-plast, hliník-papír, plast-papír) významně statisticky neliší.

Tabulka 2 Hodnoty tlaku vzduchu p v závislosti na výšce kapaliny L v nádobě o objemu 60 ml

Papír s hliníkovou fólií			Plastové víčko			Papír		
$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$
99,812	99,732	10	100,600	100,541	8	101,216	101,096	23
99,811	99,612	23	100,600	100,480	17	101,296	101,018	26
99,816	99,512	32	100,600	100,373	26	101,143	100,916	36
99,854	99,322	50	100,600	100,250	40	100,630	100,165	46
99,782	99,250	58	100,600	100,115	53	100,620	100,101	52
98,858	99,150	65	100,590	100,042	59	100,670	99,970	65
99,821	99,112	78	100,630	99,985	66	101,396	100,715	69
99,821	99,003	82	100,660	99,920	76	100,670	99,864	77
99,810	98,873	97	100,670	99,737	94	100,670	99,736	91
99,822	98,768	106	100,600	99,605	110	100,550	99,663	96

Jak plyne z hodnot uvedených v tabulce 1 i v tabulce 2, průměrná hodnota rozdílu atmosférického tlaku a tlaku vzduchu nad povrchem kapaliny je přibližně 500 Pa. Tento rozdíl je dostačující pro udržení destičky zabráňující výtoku kapaliny v klidové poloze, kdy nedojde k jejímu odtržení ode dna nádoby.

Na obr. 9 je pro úplnost zobrazeno porovnání experimentálně naměřené parabolické závislosti Δs na výšce L pro nádobu o objemu 20 ml (modře), resp. 60 ml (červeně), za použití plastové destičky.



Obr. 9 Porovnání závislosti poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L pro nádoby o objemu 20 ml a 60 ml pro plastovou destičku

Závěr

V naší práci jsme se zabývali experimentálním ověřením závislosti poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L pro různé výšky H nádoby a různé materiály destičky umístěné na spodku nádoby, která zabráňuje výtoku kapaliny.

Experimentálně naměřené hodnoty potvrdily teoretické předpoklady navržené Gancim [4]. Byla ověřena parabolická závislost poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L i skutečnost, že není-li nádoba zcela zaplněna kapalinou, k největšímu poklesu Δs dochází pro výšku kapalinového sloupce pro hodnotu $H/2$.

Experimentálně byl také ověřen s negativním závěrem miskoncept studentů, že v prostoru nad hladinou kapaliny je vzduch, jehož tlak je roven

tlaku atmosférickému. Jak bylo jednoznačně prokázáno ve všech provedených experimentech, tlak vzduchu je vždy v průměru o 500 Pa nižší. Tento pokles je dostačující k tomu, aby nedošlo k odtržení destičky zabráňující výtok kapaliny ode dna nádoby.

Statistická analýza, provedená pomocí párového t-testu s rovností rozptylů, prokázala dále platnost nulových hypotéz na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$.

Zaprvé, teoretické hodnoty se od experimentálně naměřených na výše uvedené hladině významně statisticky neliší. Zadruhé, experimentálně naměřené hodnoty pro různé typy destiček se také vzájemně významně statisticky neliší.

Poděkování

Autoři děkují všem studentům zapojeným do výzkumu. Výzkum je podpořen z prostředků projektu No. CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000669 (PŘÍRodovědné Oborové Didaktiky A praktikující učitel). Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Literatura

- [1] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika. VUTIUM, Brno, 2000.
- [2] *Fontana, F., Di Capua, R.*: Role of hydrostatic paradoxes towards the formation of the scientific thought of students at academic level Eur. J. Phys. 26 (2005), 1017–1030.
- [3] *Bednařík, M., Šíroková, M., Bujok, P.*: Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Prometheus, Praha, 2006.
- [4] *Ganci, S.*: A hydrostatic paradox revisited. Phys. Educ. 47 (2012), 2.
- [5] *O’Connel, J.*: Boyle saves the spill. Phys. Teach. 36 (1998), 74.
- [6] *Erlich, R.*: Why Toast Lands Jelly-Side Down, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [7] *Socratic* 2016 [online]. [cit. 2017-06-20].
Dostupné z: <https://socratic.org/questions/in-the-experiment-where-you-turn-a-glass-of-water-with-a-piece-of-cardboard-on-t>
- [8] *Sciphile.org* 2016 [online]. [cit. 2017-06-20].
Dostupné z: <http://sciphile.org/lessons/upside-down-water>