MATEMATIKA

O důkazech konkurentnosti přímek v rovině

Vojtěch Zlámal

Střední lesnická škola, Hranice

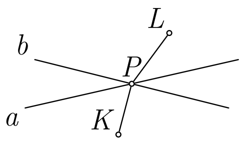
Žáci na středních a základních školách se při řešení úloh matematických soutěží (např. MO) mnohdy setkávají s úkolem dokázat, že tři nebo více přímek v rovině se protíná v jednom společném bodě (jsou konkurentní). Jelikož tato problematika není v současných středoškolských učebnicích planimetrie obsažena v potřebné míře, klade si tento článek za cíl seznámit čtenáře se základními syntetickými metodami (postupy) řešení úloh uvedeného typu. Volně tak navazuje na dříve uveřejněný článek v MFI s názvem *Čtyři body na kružnici* (viz [7]).

Je zřejmé, že úlohy, ve kterých se dokazuje konkurentnost čtyř nebo více přímek, zpravidla převádíme na úlohy o konkurentnosti právě tří přímek, a to následující úvahou: Chceme-li dokázat, že např. čtyři dané přímky a, b, c, d (po dvou různoběžné) se protínají v jednom bodě, dokážeme např. nejprve konkurentnost trojice přímek a, b, c a následně konkurentnost trojice přímek b, c, d. Odtud plyne, že všechny čtyři přímky a, b, c, d se protínají v jednom společném bodě, neboť průsečík P přímek b, c je společným průsečíkem obou zvolených trojic přímek, tudíž je společným průsečíkem čtveřice daných přímek a, b, c, d. (Analogicky lze postupovat i v úlohách o konkurentnosti více přímek.)

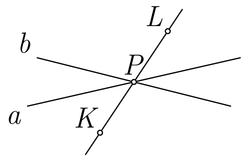
Čtyři níže uvedené metody se budou zabývat pouze problematikou konkurentnosti tří přímek v rovině, přičemž každá z metod je doplněna názornou ukázkou jejího využití.

1. metoda (přímý úhel)

Mějme různoběžky a, b, jejichž průsečík označme P, a body K, L, které na daných přímkách a, b neleží (obr. 1a). Dokážeme-li, že lomená čára KPL je ve skutečnosti úsečkou s vnitřním bodem P (např. ověřením skutečnosti, že úhel KPL je přímý, tj. $|\sphericalangle KPL| = 180°$), pak bod P leží na přímce KL. Tím dokážeme, že přímky a, b a KL jsou konkurentní.



Obr. 1a

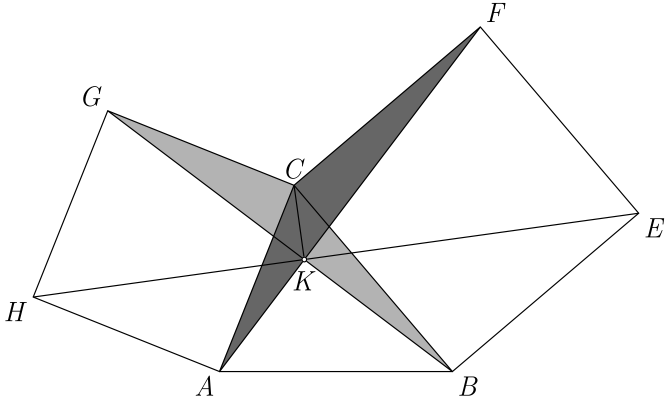


Obr. 1b

Příklad 1

Stranám BC a CA daného trojúhelníku ABC jsou vně připsány čtverce $CBEF$ a $ACGH$. Dokažte, že přímky AF, BG a HE se protínají v jednom společném bodě.

Řešení. Nechť K je průsečíkem přímek AF a BG (obr. 2). Uvažujme úsečky EK a HK. Dokážeme-li, že úhel EKH je přímý, leží bod K na přímce HE a přímky AF, BG a HE jsou konkurentní.



Obr. 2

Jelikož trojúhelníky AFC a GBC jsou shodné (dle věty *sus*), jsou úhly KAC a KGC shodné. Body A, K, C, G tedy leží na jedné kružnici. Tato kružnice je jednoznačně určena body A, C, G, jde tedy o kružnici opsanou čtverci $ACGH$ neboli o Thaletovu kružnici o průměru HC. Odtud vyplývá, že $|\sphericalangle CKH| = 90°$. Analogicky dokážeme, že $|\sphericalangle EKC| = 90°$.

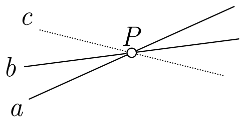
Z rovnosti

$$|\sphericalangle EKH| = |\sphericalangle EKC| + |\sphericalangle CKH| = 90° + 90° = 180°$$

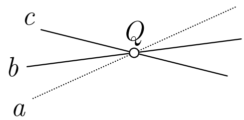
pak plyne, že bod K leží na přímce HE, tedy přímky AF, BG a HE jsou konkurentní, což jsme chtěli dokázat.

2. metoda (průsečíky dvojic přímek)

Uvažujme přímky a, b, c, které jsou po dvou různoběžné. Označme P průsečík přímek a, b a Q průsečík přímek b, c. Dokážeme-li, že body P a Q jsou totožné, pak přímky a, b, c jsou konkurentní.



Obr. 3a



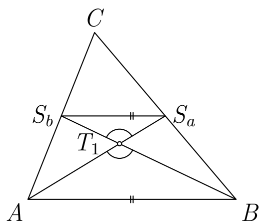
Obr. 3b

Vhodnou ukázkou této metody je důkaz konkurentnosti těžnic v libovolném trojúhelníku (viz [5]).

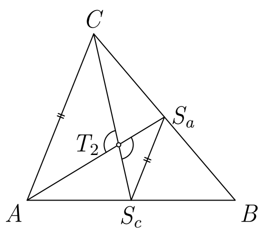
Příklad 2

Dokažte, že těžnice v libovolném trojúhelníku se protínají v jednom bodě (těžišti).

Řešení. Uvažujme střední příčky S_aS_b, S_aS_c trojúhelníku ABC (obr. 4a, 4b) a těžnice AS_a, BS_b a CS_c. Označme T_1 průsečík těžnic AS_a a BS_b, T_2 průsečík těžnic AS_a a CS_c.



Obr. 4a



Obr. 4b

Z vlastností střední příčky S_aS_b trojúhelníku ABC plyne

$$\frac{|S_aS_b|}{|AB|} = \frac{|T_1S_a|}{|AT_1|} = \frac{1}{2} \ \text{(obr. 4a)}$$

a podobně i

$$\frac{|S_aS_c|}{|AC|} = \frac{|T_2S_a|}{|AT_2|} = \frac{1}{2} \quad \text{(obr. 4b).}$$

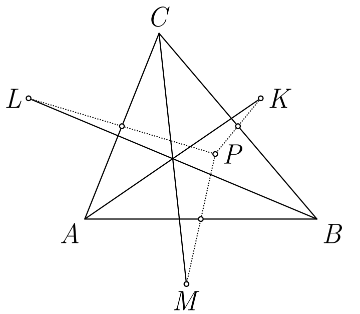
Vzhledem k tomu, že oba průsečíky T_1 i T_2 jsou vnitřní body úsečky AS_a a platí dále

$$\frac{|T_1S_a|}{|AT_1|} = \frac{|T_2S_a|}{|AT_2|},$$

jsou body T_1, T_2 totožné. Všechny tři těžnice tak procházejí týmž bodem.

Příklad 3 (1. česko-polsko-slovenská JMO, 2012)

Nechť P je bod ležící uvnitř trojúhelníku ABC a nechť K, L, M jsou body souměrně sdružené s bodem P po řadě podle středů stran BC, CA, AB. Dokažte, že přímky AK, BL, CM se protínají v jediném bodě.



Obr. 5

Řešení. Označme D, E, F po řadě středy stran BC, CA, AB. Vzhledem k tomu, že body P a K jsou souměrně sdružené podle středu D, jsou trojúhelníky BKD a CPD shodné. Odtud plyne

$$|BK| = |PC| \quad \text{a} \quad BK \parallel PC.$$

Obdobně pro body P a L platí

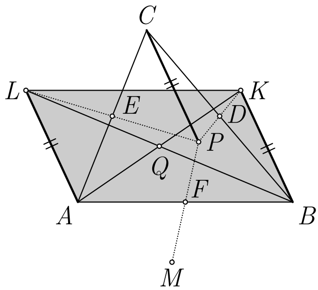
$$|AL| = |PC| \quad \text{a} \quad AL \parallel PC.$$

Body A, B, K, L tak tvoří rovnoběžník (viz obr. 6a). Označíme-li průsečík jeho úhlopříček Q, z vlastností rovnoběžníku vyplývá, že

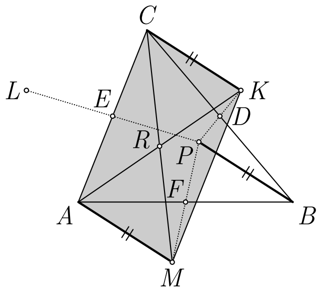
$$|AQ| = |QK|.$$

Analogicky $AMKC$ je rovnoběžník (obr. 6b) a pro průsečík R jeho úhlopříček platí

$$|AR| = |RK|.$$



Obr. 6a



Obr. 6b

Jelikož oba body Q, R leží na úsečce AK, plyne z výše uvedených rovností, že jsou totožné. Přímky AK, BL, CM se tak protínají v jednom společném bodě. Tím je důkaz uzavřen.

3. metoda (využití speciálních polohových vlastností)

K důkazu konkurentnosti přímek je také možné použít známých polohových vlastností v geometrii trojúhelníků. Řešení úlohy pak spočívá v transformaci zadaných prvků na vhodné prvky trojúhelníku tak, že z jejich polohových vlastností vyplyne konkurentnost daných přímek. Metody založené na uvedené transformaci pak mohou využívat například vlastností středu kružnice opsané, vepsané či připsané trojúhelníku, těžnic a těžiště trojúhelníku, výšek a ortocentra trojúhelníku.

V následující ukázce je využito vlastností os vnitřních úhlů trojúhelníku a středu kružnice vepsané.

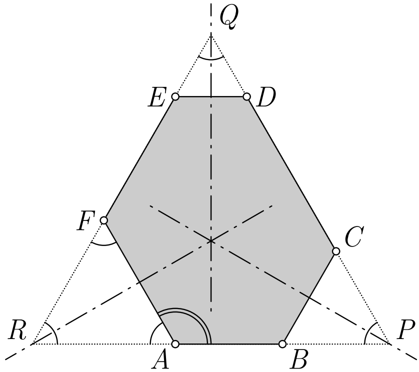
Příklad 4 (viz [4], str. 94)

V rovině je dán šestiúhelník $ABCDEF$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC, DE a FA se protínají v jednom společném bodě.

Řešení. Označme P průsečík přímek AB a CD, Q přímek CD a EF, R přímek EF a AB (viz obr. 7). Vzhledem k tomu, že všechny vnitřní úhly šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou shodné (jejich velikost je 120°), jsou trojúhelníky BPC, DQE, FRA a PQR rovnostranné.

Osa strany FA šestiúhelníku je tak osou úhlu ARF trojúhelníku FRA, neboli osou úhlu PRQ. Obdobně osy stran BC a DE jsou po řadě osami úhlů QPR a RQP. Ze známého faktu, že osy úhlů v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (středu kružnice vepsané), vyplývá, že také osy stran

BC, DE a FA daného šestiúhelníku se protínají v jednom společném bodě, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 7

Poznámka 1. Analogicky lze dokázat, že také osy stran AB, CD, EF se protínají v jednom společném bodě.

4. metoda (využití Cèvovy věty)

Poslední prezentované řešení se opírá o tzv. *Cèvovu větu.* Vzhledem k tomu, že tato věta není zmiňována ve středoškolských učebnicích planimetrie, uvádíme její znění.

Věta (Cèvova)

Nechť X, Y, Z jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Přímky AX, BY, CZ procházejí jedním bodem, právě když platí

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$

Poznámka 2. Uvedená věta je významná (a pozoruhodná) tím, že poukazuje na ekvivalenci jisté polohové vlastnosti a metrické identity v trojúhelníku.

Příklad 5

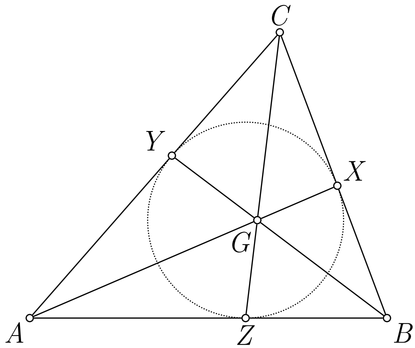
Je dán trojúhelník ABC. Označme X, Y, Z po řadě body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami a, b, c (při obvyklém značení). Dokažte, že přímky AX, BY, CZ se protínají v jednom společném bodě.

Řešení. Jelikož přímky AC, AB jsou tečnami vedenými (vnějším) bodem A ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC s dotykovými body Y, Z

(viz obr. 8), platí $|AY| = |AZ|$, a analogicky $|BZ| = |BX|$, $|CX| = |CY|$. Z uvedených tří rovností plyne

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1,$$

což na základě Cèvovy věty dokazuje, že přímky AX, BY, CZ se protínají v jednom společném bodě.



Obr. 8

Poznámka 3. Průsečík přímek AX, BY, CZ z příkladu 5 se nazývá Gergonnův bod a značíme ho G. Obdobně lze formulovat úlohu o konkurentnosti tří přímek procházejících vždy vrcholem trojúhelníku a bodem dotyku příslušné kružnice vně připsané s protější stranou k uvažovanému vrcholu. Průsečík uvedených přímek se pak nazývá Nagelův bod a značíme ho N.

Pro zájemce o zkoumanou problematiku uvádíme závěrem několik úloh k procvičení.

Příklad 6

Dokažte, že výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Příklad 7 (viz [4], str. 94)

V rovině je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC, EA a osa úhlu CDE se protínají v jednom společném bodě.

Příklad 8 (66. MO, A–III–4)

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou AD. Osy úhlů BAD, CAD protínají stranu BC po řadě v bodech E, F. Kružnice opsaná trojúhelníku AEF protíná strany AB, AC po řadě v bodech G, H. Dokažte, že přímky EH, FG, AD se protínají v jednom bodě.

Příklad 9 (viz [1], str. 67)

Nechť $ABCD$ je daný čtyřúhelník, v němž $|BC| = |CD|$, přičemž jeho strany AB, CD nejsou rovnoběžné. Označme M, N po řadě středy stran BC a AD. Dokažtě, že osy úseček AB, MN a CD se protínají v jednom společném bodě.

Příklad 10 (viz [2], str. 62)

Nechť jsou A_1, B_1 a C_1 po řadě středy kružnicových oblouků BC, CA, AB kružnice opsané trojúhelníku ABC (neobsahujících po řadě body A, B, C) a nechť jsou A_2, B_2 a C_2 body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC, CA, AB. Dokažte, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 se protínají v jednom bodě.

Příklad 11

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC se stranami a, b, c dle obvyklého značení. Označme X patu výšky na stranu a. Nechť K, L jsou po řadě body stran b, c takové, že výška AX půlí úhel KXL. Pomocí Cèvovy věty dokažte, že přímky AX, BK a CL se protínají v jednom bodě.

Literatura

[1] *Andreescu, T.*, *Rolínek, M.*, *Tkadlec, M.*: 106 Geometry Problems From the AwesomeMath Summer Program. XYZ Press, Plano, USA, 2013.

[2] *Andreescu, T.*, *Rolínek, M.*, *Tkadlec, M.*: 107 Geometry Problems From the AwesomeMath Year-Round Program. XYZ Press, Plano, USA, 2013.

[3] *Court, N. A.*: Reflections on Pure Geometry. Mathematics Magazine, roč. 37 (1964), č. 5, s. 337–339.

[4] *Švrček, J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. VUP, Olomouc, 2014.

[5] *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? Dva dny s didaktikou matematiky 2012 (sborník příspěvků). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha 2012.

[6] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

[7] *Zlámal, V.*: Čtyři body na kružnici. MFI, roč. 24 (2015), č. 5, s. 334–343.

[8] I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów. 2012. Dostupné z: `http://omj.edu.pl/uploads/attachments/cps-ind.pdf`