Pravidelnosti a symetrie pri konštrukciách magických kociek

INGRID SEMANIŠINOVÁ

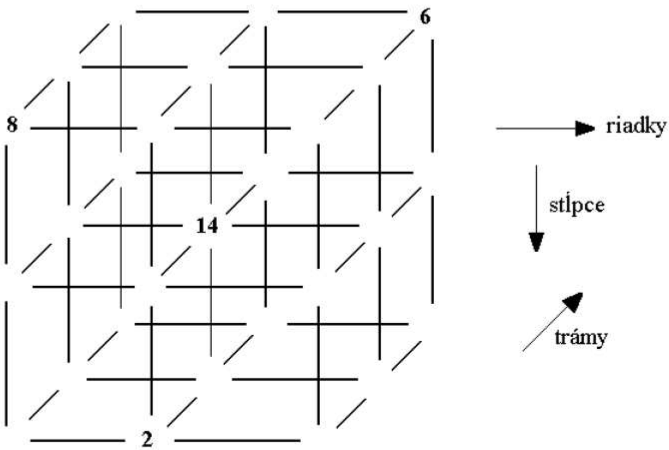
Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice

V článku [3] sme sa zoberali pravidelnosťami a symetriami pri konštrukciách magických štvorcov. V tomto príspevku sa budeme zaoberať prirodzeným zovšeobecnením magického štvorca v priestore, magickou kockou. Zamyslíme sa nad možnosťami použiť analógie algoritmov pre konštrukciu magických štvorcov na konštrukciu magických kociek.

Magické kocky

Definícia

Magická kocka rádu n je 3-rozmerná tabuľka $n \times n \times n$, ktorá obsahuje všetky prirodzené čísla $1, 2, \ldots, n^3$ tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci, tráme (pozri obr. 1) a na štyroch hlavných diagonálach je rovný konštante, ktorú nazývame magické číslo.

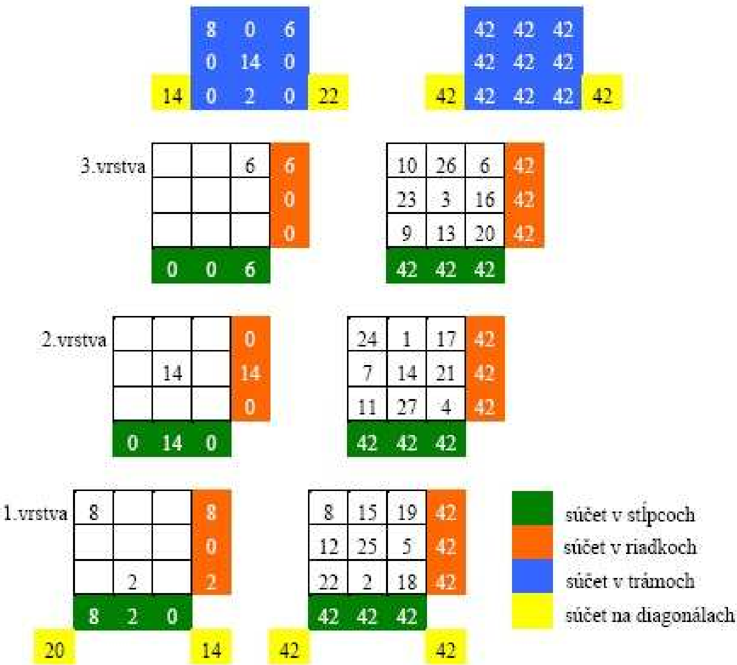


Obr. 1 Magická kocka rádu 3

Úloha 1

Do kocky na obrázku 1 doplňte chýbajúce čísla tak, aby vznikla magická kocka.

Úloha je zameraná na osvojenie definície magickej kocky, rozvíja priestorovú predstavivosť a kombinatorické myslenie žiakov. Magickú kocku je možné reprezentovať v tabuľkovom kalkulátore viacerými spôsobmi – možná reprezentácia kocky je na obr. 2.



Obr. 2 Reprezentácia magickej kocky v tabuľkovom kalkulátore (v ľavej časti obrázka je zadanie úlohy a v pravej riešenie)

Iná možnosť ako reprezentovať magickú kocku rádu n v tabuľkovom kalkulátore je zakresliť jednotlivé vrstvy na n pracovných hárkoch. Hĺbka trojrozmernej tabuľky je potom vyjadrená počtom pracovných hárkov. Takáto reprezentácia umožňuje rýchlejšie sa zorientovať v tom, ktoré prvky v tráme „patria k sebe“ a pre niektorých žiakov môže byť názornejšia.

Úloha 2

Aké je magické číslo magickej kocky rádu n?

Postup pri odvodení vzťahu pre magické číslo magickej kocky je analogický ako postup pri odvodení magického čísla magického štvorca (pozri úlohu 3 v [3]). Výsledok je $\frac{n}{2}(n^3+1)$.

Úloha 3

Porozmýšľajte, či sa dá algoritmus na konštrukciu magického štvorca formulovaný v úvode článku [3] upraviť a použiť na konštrukciu magickej kocky rádu n, kde n je číslo deliteľné štyrmi.

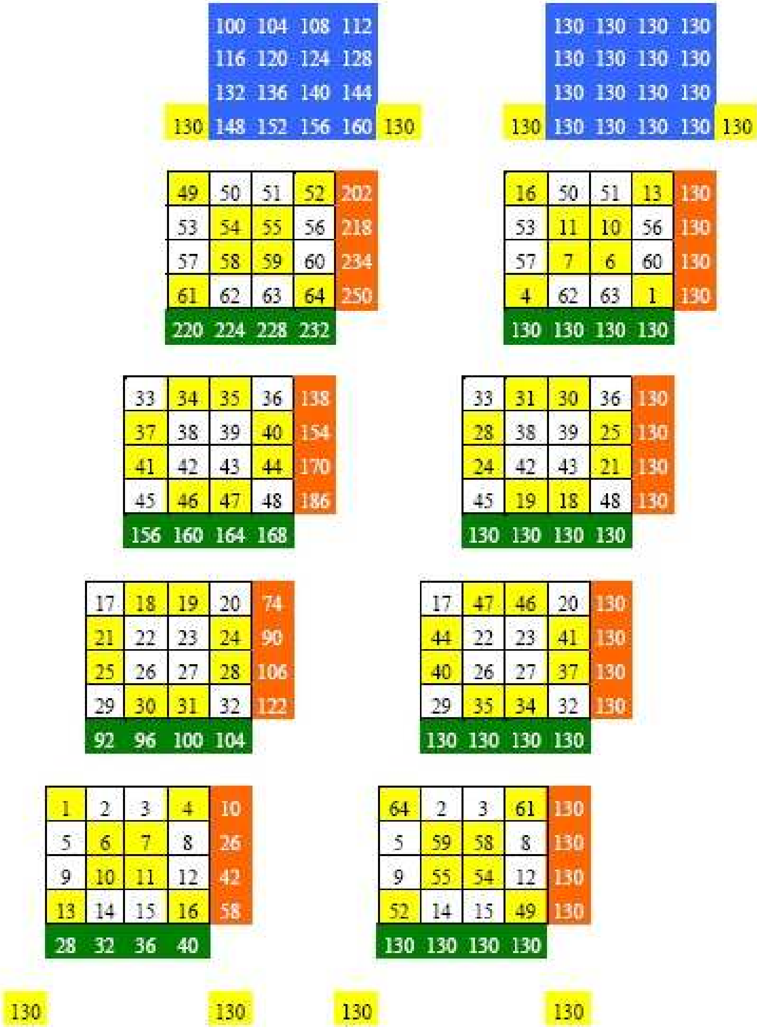
Žiaci môžu navrhovať modifikácie algoritmu a hneď ich skúšať v tabuľkovom kalkulátore. Modifikovaný algoritmus môže vyzerať nasledovne:
Kocku si rovinami rovnobežnými so stenami kocky a prechádzajúcimi stredom kocky rozdelíme na osem zhodných kociek rádu $\frac{n}{2}$.

1. Políčka v niektorej „malej“ kocke zafarbíme striedavo dvomi farbami, tak aby žiadne dve susedné políčka nemali rovnakú farbu. Políčka v ostatných „malých“ kockách zafarbíme tak, aby zafarbenie celej kocky bolo súmerné podľa troch rovín súmerností kocky, ktoré sú rovnobežné so stenami kocky a prechádzajú stredom kocky.

2. Do políčok kocky vpíšeme postupne zľava doprava, zhora dole a spredu dozadu čísla $1, 2, 3, \ldots, n^3$.

3. Navzájom medzi sebou vymeníme čísla v políčkach jednej farby, ktoré sú súmerné podľa stredu kocky. Napríklad číslo 1 vymeníme s číslom n^3.

Na obrázku 3 je konštrukcia magickej kocky rádu 4. V ľavej časti obrázka sú vrstvy 3-rozmernej tabuľky s postupne vpísanými číslami a s vyznačenými políčkami, v ktorých budeme čísla vymieňať. V pravej časti obrázka je magická kocka rádu 4.
Žiaci si môžu všimnúť, že na diagonálach sa zmení iba poloha čísel. Následne môžu vyskúšať, či podobne ako pri algoritme na konštrukciu magického štvorca, môžeme zmeniť spôsob vymieňania čísel. Na obr. 4 je 1. vrstva magickej kocky rádu 8, ktorá bola vytvorená iným spôsobom.



Obr. 3 Konštrukcia magickej kocky rádu 4

Je vhodné prediskutovať so žiakmi prečo algoritmus funguje, aké súčty výmenami „vyrovnávame.“

1	2	510	509	508	507	7	8	2052
9	10	502	501	500	499	15	16	2052
496	495	19	20	21	22	490	489	2052
488	487	27	28	29	30	482	481	2052
480	479	35	36	37	38	474	473	2052
472	471	43	44	45	46	466	465	2052
49	50	462	461	460	459	55	56	2052
57	58	454	453	452	451	63	64	2052
2052	2052	2052	2052	2052	2052	2052	2052	

Obr. 4 1. vrstva magickej kocky rádu 8

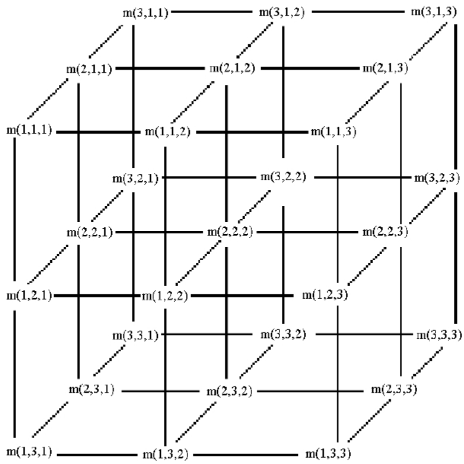
Úloha 4

Dokážte, že algoritmus, ktorý ste formulovali môžeme použiť pre konštrukciu magických kociek rádu n, kde n je číslo deliteľné číslom 4.

Budeme dokazovať postup formulovaný za úlohou 3. Dôkaz je podobný ako dôkaz v úlohe 9 v [3], preto uvedieme len jeho časť: Ak si prvok tabuľky, ktorý je v i-tom riadku, v j-tom stĺpci a v k-tom tráme označíme ako $m(i,j,k)$ (pozri tiež obrázok 5), $1 \le i,\ k \le n$ tak:

- riadok – obsahuje n-ticu čísel $m(i,j,1), m(i,j,2), \ldots, m(i,j,n)$, kde $1 \le i,\ j \le n$,
- stĺpec – obsahuje n-ticu čísel $m(i,1,k), m(i,2,k), \ldots, m(i,n,k)$, kde $1 \le i,\ k \le n$,
- trám – obsahuje n-ticu čísel $m(1,j,k), m(2,j,k), \ldots, m(n,j,k)$, kde $1 \le j,\ k \le n$.

Máme dokázať, že na základe uvedeného algoritmu dostaneme magickú kocku. To znamená, že obsahuje všetky prirodzené čísla $1, 2, 3, \ldots, n^3$, a že súčet čísel v každom riadku, stĺpci, tráme a na všetkých štyroch diagonálach je magické číslo magickej kocky rádu n, teda číslo $\frac{n}{2}(n^3+1)$.



Obr. 5: Označenie prvkov v magickej kocke

Z bodu 2 algoritmu vyplýva, že naša kocka bude obsahovať všetky prirodzené čísla od 1 do n^3. Do políčka $m(i,j,k)$, $1 \leq i,\ j,k \leq n$ teda vkladáme číslo $(i-1)n^2 + (j-1)n + k$. Podľa bodu 3 algoritmu čísla, ktoré boli napísané do políčok jednej farby nahradíme číslami, ktoré sú v políčkach stredovo súmerných podľa stredu kocky. Teda číslo v políčku $m(i,j,k)$ nahradíme číslom v políčku $m(n-i+1, n-j+1, n-k+1)$. V políčku $m(i,j,k)$ bude teraz číslo $(n-i)n^2 + (n-j)n + n - k + 1$.

Uvažujme súčet čísel v trámoch kocky. Sčítajme po dvojiciach tie čísla $m(i,j,k)$ a $m(i^*,j,k)$, ktoré sú v políčkach stredovo súmerných podľa roviny súmernosti, ktorá je rovnobežná s prednou stenou kocky. Z konštrukcie vyplýva, že obidve čísla budú buď v tvare $(i-1)n^2+(j-1)n+k$, resp. $(i^*-1)n^2+(j-1)n+k$ alebo v tvare

$$(n-i)n^2+(n-j)n+n-k+1, \text{ resp. } (n-i^*)n^2+(n-j)n+n-k+1.$$

Dvojíc prvého aj druhého typu bude $\frac{n}{4}$. Navyše zo súmernosti podľa spomínanej roviny vyplýva, že súčet $i + i^* = n + 1$.
Ďalej platí:

$$[(n-1)n^2+(j-1)n+k]+[(i^*-1)n^2+(j-1)n+k] = n^2(n-1)+2n(j-1)+2k.$$

$$[(n-i)n^2+(n-j)n+n-k+1]+[(n-i^*)n^2+(n-j)n+n-k+1] =$$

$$= n^2(n-1) + 2n(n-j) + 2(n-k+1).$$

Súčet čísel v trámoch kocky je teda:

$$\frac{n}{4}\left[n^2(n-1) + 2n(j-1) + 2k\right] +$$

$$+\frac{n}{4}\left[n^2(n-1) + 2n(n-j) + 2(n-k+1)\right] = \frac{n}{2}(n^3+1).$$

Podobne by sme ukázali, že súčet čísel v stĺpcoch, v riadkoch a na diagonálach kocky je rovný $\frac{n}{2}\left(n^3+1\right)$.

Na záver si žiaci môžu vyskúšať, či sa podobný postup ako pre magické štvorce párneho rádu nedeliteľného štyrmi, dá použiť aj pre magické kocky týchto rádov. (V tomto prípade to možné nie je. Odôvodnenie prečo je to tak prenechávame na čitateľa.) Postup na konštrukciu magických kociek všetkých rádov nájde čitateľ v [5].

Záver

Riešenie úloh a problémov formulovaných v tomto článku a v článku [3] poskytuje učiteľovi možnosť pre opakovanie algebraických a geometrických zručností v novom kontexte, rozvíja sa priestorová predstavivosť žiakov, schopnosť reprezentácie, induktívne a deduktívne myslenie žiakov. Žiaci objavujú pravidelnosti, pracujú so symetriami v novom kontexte. Jednotlivé úlohy navádzajú žiakov k systematickému skúmaniu a zápis riešenia úlohy ich vedie k dokumentácii svojho skúmania. V článku [3] a v tomto článku uvedené úlohy boli riešené so žiakmi nadanými pre matematiku v rámci matematického krúžku.

Literatúra

[1] *Hejný, M. – Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování. Portál, Praha 2001.

[2] *Koman, M.*: Pravidelnosti aritmetiky a geometrie číselných dvojčat. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky (ed. Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.). Praha 2004.

[3] *Semanišinová I.*: Pravidelnosti a symetrie pri konštrukciách magických štvorcov. MFI, roč. 21 (2011/2012), č. 9, str. 523-532.

[4] *Trenkler, M.*: Magic cubes. The Mathematical Gazette 82(1998), pp. 56–61.

[5] *Trenkler, M.*: A construction of magic cubes. The Mathematical Gazette, 84 (2000), pp. 36–41.