

## Online nástroje

Alcumus – <https://artofproblemsolving.com/alcumus>

Desmos – <https://teacher.desmos.com>

GeoTest – <http://geotest.geometry.cz>

Khan Academy – <https://www.khanacademy.org>

Techambition – <https://techambition.com>

# Diagnostika žiackych miskoncepcií v pravdepodobnosti

*TADEÁŠ GAVALA – STANISLAV LUKÁČ*

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, Slovensko

V oficiálnych dokumentoch vzdelávacích inštitúcií aj Európskej komisie sa pre matematické vzdelávanie zdôrazňuje dôležitosť presadzovania vyučovacích metód podporujúcich aktívne žiacke bádanie, modelovanie a vytváranie prepojení medzi rôznymi reprezentáciami, konceptuálne porozumenie a riešenie problémov. V prírodovednom, ale aj v matematickom vzdelávaní sa v súčasnosti prejavujú snahy o implementovanie bádateľských prístupov k výučbe. Bádanie vo vyučovaní je podobne ako vedecké bádanie nasmerované k pozorovaniu javov, ku kladeniu otázok, k hľadaniu odpovedí, k využívaniu vhodných argumentov na vysvetlenie a zdôvodnenie objavených zistení. Implementácia nových vyučovacích metód do vzdelávania nie je jednoduchý a priamočiary proces. Dôvody vyplývajú aj zo skutočnosti, že vyučovacie stratégie nemožno jednoducho kopírovať medzi rôznymi vyučovacími predmetmi. Aj pri aplikovaní bádateľských prístupov k vyučovaniu majú odlišné postavenie experimenty s fyzickými pomôckami a matematické modelovanie. Taktiež je kladený rôzny dôraz na rozvíjanie jednotlivých bádateľských spôsobilostí vo vyučovaní matematiky a prírodovedných predmetov.

Rozmanité činnosti a interakcie v triede vyžadujú aj využívanie rozmanitých spôsobov hodnotenia žiakov a postupov vyhodnocovania výsledkov

vzdelávania. V súčasnosti prevláda v školskej praxi sumatívne hodnotenie, ktoré je základom pre klasifikáciu žiakov. Učitelia využívajú v značnej miere ústne skúšanie, ktoré je často orientované na pamäťovú stránku učenia a písomné práce zamerané na preverovanie miery osvojenia štandardných postupov riešenia úloh. Súčasťou inovatívnych vyučovacích stratégií sú aj nové formy dialógu a interakcií medzi učiteľom a žiakom. Pri vedení diskusie učiteľ analyzuje odpovede žiakov a snaží sa zohľadňovať pri kladení otázok typické chyby žiakov. Na základe odhalených nedostatkov a miskoncepcií poskytuje žiakom vhodné príklady aj proti-príklady podporujúce argumentáciu a rozvíjanie kritického myslenia. Poskytovanie rýchlej a účinnej spätnej väzby je kľúčovým faktorom formatívneho hodnotenia. Vhodná aplikácia formatívneho hodnotenia umožňuje realizovať učebné postupy v triede podporujúce aktívne učenie a zvyšovať efektívnosť procesu učenia. Na dôležitosť formatívneho hodnotenia poukazuje aj správa OECD, v ktorej sa zdôrazňuje, že formatívne hodnotenie musí byť súčasťou plánovania výučby a má sa stať neoddeliteľnou súčasťou triednej praxe.

Aplikovanie rôznych foriem formatívneho hodnotenia poskytuje potenciál pre skvalitnenie výsledkov vyučovacieho procesu. Vhodne aplikované formatívne hodnotenie by malo umožniť žiakom lepšie zvládnutie vzdelávacích štandardov a zlepšenie konceptuálneho porozumenia. Na obr. 1 je zobrazený model formatívneho hodnotenia vyjadrujúci opakujúci sa cyklus, v ktorom na hodnotenie nadväzuje analýza žiackych výkonov a reakcia učiteľa.



Obr. 1 Cyklus formatívneho hodnotenia

V článku sa zameriavame na analýzu žiackych výkonov, pričom sa budeme snažiť rozlišovať medzi miskoncepciami a bežnými chybami v pravdepodobnosti. Pod termínom miskoncepcia chápeme nesprávne vytvorené pojmy či koncepty, nesprávne použité metódy riešenia, formálne či chybné predstavy alebo nesprávne poznatky žiaka založené na intuíciiach, ktoré sú

kritickým aspektom procesu učenia, resp. procesu nadobúdania vedomostí. Napríklad: nesprávnu voľbu konfigurácie pre zápis výsledkov hry považujeme za miskoncepciu. Avšak zabudnutie nejakej možnosti pri vhodne vytvorenom systéme výpisu výsledkov či chyby v realizácii číselných operácií považujeme za chyby z nepozornosti.

Analýzou miskoncepcií v pravdepodobnosti sa zaoberali viacerí autori. Fischbein a Schnarch [1] skúmali viacero miskoncepcií z pravdepodobnosti na väčšej vzorke žiakov a študentov a opísali nasledovné miskoncepcie: reprezentatívnosť, negatívny efekt novosti, zložené a jednoduché javy, klamné spojenie, efekt veľkosti vzorky, dostupnosť a efekt časovej osi (tzv. Falk fenomén). Tversky, Khaneman [6] a Shaughnessy [5] sa nazdávajú, že väčšina miskoncepcií z pravdepodobnosti vychádza z miskoncepcie reprezentatívnosti. Na základe prác venovaných výučbe kombinatoriky a pravdepodobnosti a nášho výskumu sme vymedzili ďalšie miskoncepcie objavujúce sa v žiackych riešeniach úloh z pravdepodobnosti: voľba konfigurácie reprezentujúcej zápis výsledkov náhodnej udalosti, nesprávna organizácia výpisu možností, zovšeobecnenie na základe jedného znaku.

V našich ukázkach hodnotiacich hárkov na diagnostikovanie žiackych miskoncepcií v pravdepodobnosti sa budeme podrobnejšie venovať nasledujúcim miskoncepciám:

- miskoncepcii reprezentatívnosti: žiaci majú tendenciu odhadovať pravdepodobnosť udalosti s prihliadnutím na to, ako dobre táto udalosť koreluje s ich životnými skúsenosťami (pozri [1]);
- miskoncepcii nesprávnej voľby konfigurácie reprezentujúcej zápis výsledkov náhodnej udalosti: pri vytvorení spoločnej predlohy (vzoru) pre výpis jednotlivých možností žiaci nezohľadňujú podmienky špecifikované v úlohe alebo nesprávne interpretujú vzťahy medzi jednotlivými objektmi;
- miskoncepcii nesprávnej organizácie výpisu možností: žiaci nevedia organizovať vypisované možnosti zavedením vhodného systému výpisu alebo využitím vhodnej schémy;
- miskoncepcii zovšeobecnenia na základe jedného znaku: žiaci nepristupujú k riešeniu úlohy komplexne, sústredia sa na jeden znak, na ktorom založia riešenie úlohy.

## Úlohy zamerané na miskoncepciu reprezentatívnosti

Úlohy v prvej ukážke hodnotiaceho hárka vyžadujú od žiakov vysporiadanie sa s miskoncepciou reprezentatívnosti. Hodnotiaci hárkok odpor-

účame zadať žiakom v priebehu tematického celku, kedy žiaci už majú osvojenú Laplaceovu schému na výpočet pravdepodobnosti a ich postup pri riešení úloh je založený na kombinatorickom prístupe. Hodnotiaci hárok pozostáva z dvoch úloh, pričom prvá úloha má aj funkciu prípravnej úlohy navádzajúcej žiakov na riešenie druhej úlohy. Správna odpoveď pri oboch zadaných úlohách je c). Od žiakov je vyžadované aj zdôvodnenie odpovede, ktoré umožňuje odhaliť miskoncepciu reprezentatívnosti. Pri výbere úloh sme sa inšpirovali publikáciami, ktorých autormi sú Kustos a Zelkowski [3] a Fischbein a Schnarch [1].

### 1. úloha: Hody mincou

Rudo hodil šesť krát mincou a to, čo mu padlo, si zapísal. Ak mu padla hlava, zaznačil ju ako H. Ak mu padol vzor, zaznačil ho ako V. Čo je pravdepodobnejšie?

- Padla mu postupnosť HVHVHV.
- Padla mu postupnosť HHHVVV.
- Obe postupnosti sú rovnako pravdepodobné.

Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

*Metodický komentár.* Žiaci sa často domnievajú, že postupnosť „na striedačku“ je pravdepodobnejšia ako postupnosť „tri hlavy a potom tri vzory“, pretože postupnosť „na striedačku“ sa javí ako náhodnejšia, a teda aj častejšie sa vyskytujúca. Postupnosť „tri hlavy a potom tri vzory“ sa zdá byť menej pravdepodobná. Je kľúčové priviesť žiakov k zisteniu, že jednotlivé hody mincou sú nezávislé náhodné pokusy. Preto pri každom ďalšom hode je padnutie hlavy rovnako pravdepodobné ako padnutie vzoru. Každá postupnosť hláv a vzorov je teda rovnako pravdepodobná.

### 2. úloha: Lotéria

V číselnej lotérii „LOTO 5 z 35“ sa tipuje päť čísel od 1 po 35, pričom za výhru sa považuje uhádnutie všetkých vylosovaných čísel. Kamil podal tiket s číslami 21, 22, 23, 24, 25 a Lenka podala tiket s číslami 9, 10, 19, 25, 33. Kto má väčšiu šancu na výhru?

- Kamil má väčšiu šancu na výhru.
- Lenka má väčšiu šancu na výhru.
- Obaja hráči majú rovnakú šancu na výhru.

Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

*Metodický komentár.* Niektorí žiaci sa domnievajú, že Kamilov tiket s číslami idúcimi za sebou nemôže vyhrať. Predpokladajú, že Lenka má

väčšiu šancu na výhru, lebo si tipla čísla „náhodne“, resp. vybrala si prirodzené čísla, ktoré nenasledujú za sebou. Táto nesprávna úvaha zrejme pramení zo skúsenosti, že v lotérii vyhrávajú tikety s číslami, medzi ktorými nie je žiaden vzťah (napr. čísla nejdu za sebou, netvoríä členy aritmetickej postupnosti, netvoríä členy geometrickej postupnosti a pod.). Učiteľ má žiakov priviesť k zisteniu, že ide o päťicu čísel a nie o to, aké sú to čísla. Každá päťica čísel má preto rovnakú šancu byť vylosovaná.

### **Analýza žiackych riešení**

Hodnotiaci hárok obsahujúci obe vyššie uvedené úlohy sme zadali 49 žiakom z dvoch tried v treťom ročníku gymnázia. Charakter prvej úlohy navádza žiakov na zistenie, že každý pokus je nezávislý, čo je kľúčové pri riešení druhej úlohy o lotérii. Riešenia žiakov sme kategorizovali podľa vybranej odpovede nasledovne:

- obe úlohy správne – 32 žiakov (65 %);
- prvá úloha správne, druhá úloha nesprávne – 16 žiakov (33 %);
- obe úlohy nesprávne – 1 žiak (2 %).

Z uvedených výsledkov usudzujeme, že žiakom z prvej skupiny pomohlo riešenie prvej úlohy porozumieť nezávislosť výsledkov za sebou idúcich hodov mincou a nedopustili sa miskoncepcie pri riešení druhej úlohy. Niektorí žiaci však poukázali na náhodnosť a nezávislosť jednotlivých pokusov len v prvej úlohe a v druhej úlohe odpovedali nesprávne. Týmto žiakom by mal pri eliminácii miskoncepcie pomôcť učiteľ.

Pri riešení prvej úlohy sa žiaci dopúšťali najmä týchto chýb:

- logická chyba: postupnosti hodov sú rovnako pravdepodobné, pretože v nich padol rovnaký počet hláv a vzorov (obr. 2);
- logická chyba: striedanie hláv a vzorov pri hádzaní mincou je pravdepodobnejšie ako niekoľko padnutí rovnakých výsledkov za sebou (obr. 3).

Pri riešení druhej úlohy sa prejavili hlavne tieto nedostatky:

- miskoncepčia reprezentatívnosti sa prejavuje v rôznych podobách. Uvádzame najčastejšie žiacke zdôvodnenia a riešenia:
  - v reálnom živote je málo pravdepodobné, že počítač vylosuje päť čísel idúcich za sebou, výherné čísla sú väčšinou náhodne rozmiestnené;

- Lenka má väčšiu šancu na výhru, pretože jej spektrum čísel je širšie;
- žiaci správne vypočítajú pravdepodobnosti vylosovania oboch päťíc čísel (sú rovnaké), avšak životná skúsenosť (vylosované čísla nejdú za sebou) ich motivuje k nesprávnej odpovedi (obr. 4);
- zdôvodnenia typu: „tiket s číslami idúcimi za sebou ešte nikdy nevyhrál“;
- traja žiaci, ktorí vybrali ako správnu odpoveď a), zdôvodňovali svoju odpoveď tým, že šanca uhádnuť aspoň jedno z čísel idúcich za sebou je väčšia, ako v prípade, že by čísla boli tipované náhodne – to však na výhru nepostačuje;
- logická chyba: obaja tipujúci majú rovnakú šancu na výhru práve preto, lebo ani jeden v skutočnosti nevyhrá, obaja tipujúci majú takmer nulovú šancu na výhru.

Zdôvodni svoju odpoveď: V oboch postupnostiach by padla hlava aj naci 3-krát so 6-tich hodov. Postupnosť v tomto prípade nie je poriadková, a pravdepodobnosť je rovnaká, keďže v oboch postupnostiach by rovnako padli aj hlava aj naci.

Obr. 2 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hodoch mincou

Zdôvodni svoju odpoveď: Nie je veľká šanca že mi padne 3x po sebe to isté. ale je rovnako pravdepodobné že sa budú stále meniť.

Obr. 3 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hodoch mincou

Miesto na tvoje riešenie:

A matematického charakteru majú porovnávajú rovnakú. Ale v prípade pravdepodobnosti má väčšiu šancu vyhrať, lebo je malá šanca, že postup 5 svedcov rovnaké číslo.

Obr. 4 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o lotérii

## Odporúčania pre formatívne hodnotenie

Miskoncepciu reprezentatívnosti je možné eliminovať využitím vhodných appletov, pričom odporúčame viesť žiakov k uvedomeniu si skutočnosti, že všetky postupnosti prvkov (hodov či čísel) sú rovnako pravdepodobné. V *applete* môžeme skúmať postupnosti hláv a vzorov pri hode mincou ([http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames\\_asid\\_305\\_g\\_3\\_t\\_5.html?from=category\\_g\\_3\\_t\\_5.html](http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_3_t_5.html?from=category_g_3_t_5.html)). Na základe simulácie alebo aj experimentovania s mincami môže učiteľ naviesť žiakov k tomu, že „minca si nepamätá, ako padla v predošlom hode“. Lotériu môžeme simulovať pomocou

generátora náhodných čísel (<https://www.itnetwork.cz/javascript-online-generator-nahodnych-random-cisel-se-zvolitelnym-rozsahem>, MIN: 1, MAX: 35, RANGE: 5) a pomocou neho naviesť žiakov k zisteniu, že každá päťica čísel má rovnakú šancu byť vylosovaná.

Ďalším spôsobom eliminácie tejto miskoncepce je isté „zjednodušenie“ zadania úlohy. Logické chyby uvedené v prípravnej úlohe by bolo možné eliminovať analýzou ďalších postupností hodov, pričom by počet hláv a vzorov nebol rovnaký. V prípade úlohy o lotérii môžeme uvažovať lotériu s piatimi číslami, pričom tipujúci podávajú tikety s dvoma číslami.

## Úlohy o hrách

Úlohy zaradené do druhej ukážky hodnotiaceho hárka vyžadujú od žiakov vytvorenie správnych konfigurácií prvkov výberového priestoru a analyzovanie všetkých možností. Hodnotiaci hárok odporúčame zadať žiakom v úvode tematického celku, kedy žiaci ešte chápu pojem pravdepodobnosť na intuitívnej úrovni a pri aplikácii vzťahu na výpočet pravdepodobnosti využívajú kombinatorický prístup k zisťovaniu počtu výsledkov náhodného pokusu. Hodnotiaci hárok pozostáva z dvoch úloh, pričom prvá úloha má aj funkciu prípravnej úlohy navádzajúcej žiakov na riešenie druhej úlohy. Správna odpoveď pri oboch zadovaných úlohách je „ÁNO“, lebo v uvedených hrách majú obaja hráči rovnakú šancu na výhru. Od žiakov bolo vyžadované aj zdôvodnenie odpovede, pri ktorom sme očakávali analýzu všetkých možných priebehov daných hier. Pri výbere úloh sme sa inšpirovali publikáciami, ktorých autormi sú Płocki [4] a Kolková [2].

### 1. úloha: Hra s mincami

Paľo a Lucia sa pripravujú na hru s mincami. Paľo bude hádzať naraz dvoma mincami, Lucia bude hádzať jednou mincou.

- Paľo vyhráva, ak mu padne viac znakov ako Lucii.
- V opačnom prípade vyhráva Lucia.

Majú obaja hráči rovnakú šancu na výhru? Áno    Nie  
Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

*Metodický komentár.* Žiakom sa môže zdať, že Paľo má väčšiu šancu na výhru, pretože hádže naraz dvoma mincami. Pri riešení úlohy odporúčame viesť žiakov k vizualizácii skúmanej situácie pomocou tabuľky (obr. 5) alebo pomocou stromového diagramu. V tabuľke sú zaznačené všetky možné výsledky (č = číslo, z = znak) hodu jednou mincou (Lucia) a hodu dvoma

mincami (Paľo). Je zjavné, že Paľo vyhráva v štyroch prípadoch (sivé oblasti) a Lucia taktiež v štyroch prípadoch (biele oblasti). Hra je spravodlivá, pretože pre oboch hráčov existuje rovnaký počet možností na výhru.

Paľo	zz		
	čz		
	zč		
	čč		
		č	z
		Lucia	

Obr. 5 Riešenie úlohy o hre s mincami využitím tabuľky

## 2. úloha: Hra Väčšie číslo

Andrej a Barbora hrajú hru s dvoma vreckami, do ktorých nevidieť. Vieme však, že:

- vo vrecku A sú dve guľôčky označené číslom 2 a jedna guľôčka označená číslom 6,
- vo vrecku B sú tri guľôčky označené číslom 5 a jedna guľôčka označená číslom 1.

Hra prebieha nasledovne: Andrej vylosuje z vrečka A jednu guľôčku a z vrečka B vylosuje jednu guľôčku Barbora. Ten, kto vylosuje guľôčku s väčším číslom, vyhráva.

Majú obaja hráči rovnakú šancu na výhru? Áno    Nie  
Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

*Metodický komentár.* Žiaci môžu riešiť úlohu viacerými spôsobmi. Aj v tomto prípade je vhodné, aby žiaci pri riešení úlohy zostavili rozpis všetkých možných priebehov hry. Žiaci by si mali uvedomiť, že pri vypisovaní možností je potrebné rozlišovať guľôčky s rovnakou nominálnou hodnotou (obr. 6).

Andrejove guľôčky	2	2	6
Barborine guľôčky			
5	52	52	56
5	52	52	56
5	52	52	56
1	12	12	16

Obr. 6 Riešenie úlohy o hre s guľôčkami využitím tabuľky



Z tabuľky vidno, že v šiestich prípadoch vyhráva Andrej (biele oblasti) a v šiestich prípadoch vyhráva Barbora (sivé oblasti). Hra je preto spravodlivá. Úlohu Hra Väčšie číslo sme najprv zadali samostatne bez prípravnej úlohy žiakom dvoch tried v druhom ročníku na gymnáziu. Priemerná úspešnosť žiakov bola pomerne nízka – približne 43 %. Aj z tohto dôvodu sme sa rozhodli zadať túto úlohu v kombinácii s jednoduchšou prípravnou úlohou. Zisťovali sme, či sa priemerná úspešnosť žiakov pri riešení tejto úlohy zvýši.

### Analýza žiackych riešení

Hodnotiaci hárok obsahujúci obe vyššie uvedené úlohy sme zadali 40 žiakom dvoch tried v treťom ročníku na gymnáziu. Charakter prvej úlohy navádza žiakov na riešenie pomocou výpisu možností. Táto stratégia riešenia môže byť vhodne využitá aj pri riešení druhej úlohy. Riešenia žiakov sme kategorizovali podľa vybranej odpovede nasledovne:

- obe úlohy správne – 19 žiakov (48 %);
- iba prvá úloha správne – 6 žiakov (15 %);
- iba druhá úloha správne – 5 žiakov (12 %);
- obe úlohy nesprávne – 10 žiakov (25 %).

V oboch testovaných skupinách využívala väčšina žiakov metódu vypisovania možností. Niektorí žiaci si pri riešení vytvorili aj tabuľku so všetkými možnosťami (obr. 7).

	Z	H
HH	L	L
HZ	L	P
HZ	L	P
ZZ	P	P

	5	5	5	1
2	B	B	B	A
2	B	B	B	A
6	A	A	A	A

Obr. 7 Žiacke riešenia prvej a druhej úlohy o hrách využitím tabuľky

V žiackych riešeniach sa prejavili hlavne tieto miskoncepcie a chyby:

- miskoncepčia nesprávnej voľby konfigurácie: žiaci pri zápise možností nerozlišili možnosti hlava-znak a znak-hlava, v dôsledku čoho nebol počet možností na víťazstvo pre oboch hráčov rovnaký (obr. 8);
- miskoncepčia nesprávnej organizácie výpisu možností: pozorovali sme, že žiaci pri riešení prvej úlohy neuviedli niektoré možnosti v dôsledku

nevyužitia prehľadného systému pri porovnávaní výsledkov hodov oboch hráčov, resp. pri riešení druhej úlohy sa zamerali len na situácie, kde jeden z hráčov určite vyhrá, resp. sa zamerali na niektoré možné priebehy hry;

- miskoncepcia zovšeobecnenia na základe jedného znaku: žiaci pri riešení prvej úlohy porovnávali len pravdepodobnosti padnutia znaku, resp. znakov. Nazdávali sa, že Paľo má väčšiu šancu na výhru, pretože má viac mincí (obr. 9), resp. pri riešení druhej úlohy sa nazdávali, že Barbora má väčšiu šancu na výhru, pretože má viac guľôčok s väčším číslom (obr. 10), resp. Andrej má väčšiu šancu na výhru, pretože má „neporaziteľnú“ guľôčku s číslom 6 (obr. 11);
- chyby z nepozornosti: žiaci pri riešení prvej úlohy pri systematickom výpise možností „zabudli“ len na jednu, dve možnosti, resp. pri riešení druhej úlohy nesprávne spočítali počet víťazstiev jednotlivých hráčov. Pri chybách z nepozornosti odporúčame naviesť žiakov pomocou kontrolných otázok k odhaleniu chýbajúcej možnosti či nevedenia niektorého výsledku hry.

Miesto na tvoje riešenie:

$$L: H/2$$

$$P: HH, HZ, ZH, ZZ$$

Zdôvodni svoju odpoveď:  
Pretože Lucia má 50% šancu, že padne znak a Paľo má len ~~33%~~ 33% šancu, že padne 2 znaky.

Obr. 8 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s mincami

Zdôvodni svoju odpoveď:  
pri Paľovi je väčšia pravdepodobnosť, že mu padne znak 2-krát, keďže má 2 mince. Hra určite nie je spravodlivá.

Obr. 9 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s mincami

Zdôvodni svoju odpoveď:

Niekoľko šancu má Barbora, pretože má 3 g. s vyšším číslom, nakoľko Andrej má iba 1 takú g.

Obr. 10 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s guľôčkami

Zdôvodni svoju odpoveď:  
Je väčšia pravdep., že vyhrá Andrej pretože aj keď si Barbora vyloží 5 a Andrej 6 stále vyhrať on.

Obr. 11 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s guľôčkami

Prvú úlohu vyriešilo správne 25 žiakov (63 %) a druhú úlohu 24 žiakov (60 %). Úspešnosť žiakov pri riešení druhej úlohy sa v porovnaní s naším predošlým testovaním zvýšila. Nazdávame sa, že prípravná úloha pomohla žiakom pri riešení druhej úlohy. Pri analýze žiackych riešení sme si všimli, že žiaci, ktorí v prvej úlohe dospeli k správne riešeniu systematickým výpisom možností, mali vyššiu úspešnosť pri riešení druhej úlohy.

## Odporúčania pre formatívne hodnotenie

Miskoncepciu nesprávnej voľby konfigurácie je vhodné eliminovať reálnymi pokusmi hádzania dvoch mincí a vyhodnotením výsledkov. Väčší počet realizovaných pokusov a prehľadné vyhodnotenie výsledkov ponúkajú *applety* dostupné na internete (napríklad <http://syzygy.virtualave.net/multicointoss.htm>). Na základe analýzy výsledkov by mal učiteľ od žiakov vyžadovať odpoveď na otázku, či pri hode dvoma mincami padajú častejšie dve rovnaké alebo dve rôzne strany. Učiteľ by mal priviesť žiakov k poznaniu, že aj keby mali mince rovnakú nominálnu hodnotu, rovnaký rok výroby, a pod., vždy sú to dva rôzne objekty.

Podobné nedostatky v žiackych riešeniach sa môžu prejavíť aj pri výbere guľôčok z vrečka. Aj v tomto prípade predstavujú tri guľôčky označené číslom 5 tri rôzne objekty a vo výpise možností je potrebné ich rozlišovať. Pri objavení sa chybných riešení spojených s uvedeným typom chyby by učiteľ mohol zadať žiakom úlohu: Vo vrečku sú tri biele a jedna modrá guľôčka. Náhodne vyberieme z vrečka dve guľôčky. Čo je pravdepodobnejšie, že vyberieme z vrečka guľôčky rovnakej alebo rôznej farby? Z vlastnej skúsenosti vieme, že niektorí žiaci rozlíšia len dve možnosti: buď sú obidve guľôčky biele, alebo majú guľôčky rôznu farbu. Preto sú obidva výsledky rovnako pravdepodobné. V uvedenej úlohe je to náhodou správny výsledok. Ale, ak by sme pridávali biele guľôčky do vrečka, stále by bol výber dvoch bielych guľôčok rovnako pravdepodobný, ako výber dvoch guľôčok rôznej farby? Odpoveď by mala žiakov priviesť k rozlišovaniu bielych guľôčok.

Pri eliminácii miskoncepce nesprávnej organizácie výpisu možností je vhodné trénovať so žiakmi systematický výpis všetkých možností pri riešení jednoduchších úloh. Učiteľ by mal žiakov viesť k prehľadnému usporiadaniu možností vo forme tabuľky alebo stromového diagramu. Žiaci by mali vedieť využívať ukotvenie jedného prvku a popis analogických vetiev v stromovom diagrame, aby vedeli využívať tento postup aj pri riešení úloh s väčším počtom prvkov.

Pri eliminácii miskoncepce zovšeobecnenia na základe jedného znaku odporúčame viesť žiakov k tomu, aby sa nespoliehali len na intuíciu, ale aby sa snažili podložiť svoje riešenie matematickými argumentmi.

## Záver

Učiteľ pri výučbe pozoruje prácu žiakov, kladie im otázky a analyzuje ich odpovede. Pre efektívne aplikovanie formatívneho hodnotenia je dôležité, aby učiteľ poznal typické chyby žiakov a miskoncepce, ktorých príčinou je neporozumenie základných pojmov a vzťahov. Poznanie zdrojov miskoncepcií umožňuje učiteľovi zadávať žiakom otázky, podnecovať diskusiu medzi žiakmi a poskytovať žiakom cieleňú spätnú väzbu, ktorá im umožní porozumieť, v čom sú ich predstavy mylné a prečo sú ich úvahy využité pri riešení úloh chybné. Vhodné aplikovanie formatívneho hodnotenia môže pomôcť odhaľovať a eliminovať miskoncepce už v priebehu výučby a prispieť k zlepšeniu učebných výsledkov.

## Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0265/17 „Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky“.

## Literatúra

- [1] *Fischbein, E., Schnarch, D.*: The Evolution with Age of Probabilistic: Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, roč. 28 (1997), č. 1, s. 96–105.
- [2] *Kolková, M.*: Matematické vzdelávanie a rozvoj kľúčových kompetencií na úrovni reflexie (Dizertačná práca). Univerzita P. J. Šafárika, Košice, 2011.
- [3] *Kustos, P., Zelkowski, J.*: Grade-continuum trajectories of four known probabilistic misconceptions: What are students' perceptions of self-efficacy in completing probability tasks? *The Journal of Mathematical Behaviour*, roč. 32 (2013), č. 3, s. 508–526.
- [4] *Plocki, A.*: Pravdepodobnosť okolo nás: stochastika v úlohách a problémoch. Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2007.
- [5] *Shaughnessy, J. M.*: Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions. In: A. P. Schulte (Ed.), *Teaching statistics and probability*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1981, s. 90–100.
- [6] *Tversky, A., Kahneman, D.*: Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. In: Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982, s. 3–22.