

Elektromagnetická indukce v obvodu s cívkou

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V roce 2017 vydalo nakladatelství Prometheus sedmé přepracované vydání učebnice *Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus* [1], jejíž první vydání vyšlo již v roce 1992. Učebnice vznikla v návaznosti na tzv. federální učebnice vydávané v 80. letech (viz [2]). Zpracování učiva v této učebnici v podstatě odpovídá standardu, jak se fyzika tradičně vyučuje na středních školách v mnoha zemích. Průběžně byla opravována občasná nedopatření v textu učebnice a byly prováděny menší změny v obsahu a pojetí učiva, které si vyžádal zejména vývoj technických aplikací učiva elektromagnetismu. Autoři v průběhu let nezaznamenali ze strany učitelů středních škol nějaké závažnější výtky. Nedávno však došel na adresu autora mail, jehož pisateli se náhodně dostala učebnice do ruky, a projevil s jejím obsahem nesouhlas, patrný z krátké pasáže vyjmuté z obsáhlého mailu:

...zatemnění v duších (rozuměj studentů) působí rozpory ve výkladu magneto-elektrické indukce a vágně definovaného indukovaného napětí v cívce. Kupodivu to svědčí o zmatku v hlavách fyziků, na čemž mají zásluhu i vysokoškolské učebnice (Fuka a Havelka, Horák a Krupka, Klimeš a Kracík a Ženíšek), při vši úctě k jejich autorům. Naproti tomu elektrotechnici v tom mají jasno, neboť v technice neplatí, že „papír všechno snese“. Tam je nutno konkrétně vědět, jak příslušné napětí změřím a spočítám v konkrétním uzlu obvodu. Váš výklad se bohužel přimyká k oněm rozporným „papírovým tygrům“...

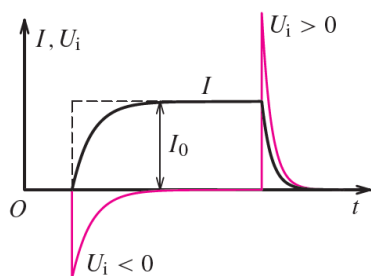
V čem tedy je problém, vzbuzující tak zásadní nesouhlas pisatele. Jde v podstatě o znaménko minus ve vyjádření vztahu pro indukované napětí v cívce, kterou prochází časově proměnný proud. Tradice tohoto učiva se opírá o Faradayův zákon elektromagnetické indukce (pisatel pro tento děj používá označení magneto-elektrická indukce) a indukované elektromotorické napětí v cívce je vyjádřeno v učebnici vztahem (viz [1, s. 134])

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

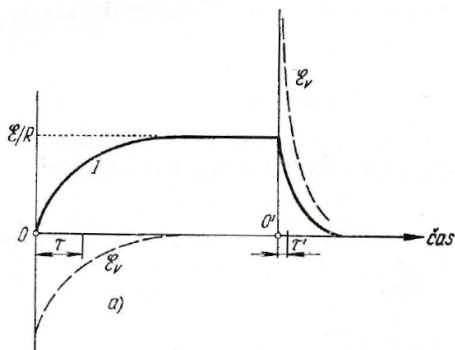
Jaký postoj k tomuto údajnému problému zaujmout, naznačíme podrobnějším rozbořem přechodného děje v obvodu tvořeném sériovým spojením rezistoru a cívky (obvod RL), který je v učebnici součástí rozšiřujícího učiva na příloženém CD (viz článek R6.3).

Přechodný děj v sériovém obvodu RL

Při přechodném ději, tzn. připojení obvodu RL ke zdroji napětí, popř. jeho odpojení od zdroje dochází v cívce ke vzniku indukovaného napětí, jehož časový průběh a polarita je patrná z obr. 1 ([1, obr. R6-7]). Tato časová závislost napětí a proudu se vyskytuje v naprosté většině učebnic, nejen středoškolských, ale i vysokoškolských, jak dokládá obrázek z jedné z nejkvalitnějších českých vysokoškolských učebnic, kterou je stále nepřekonaná učebnice *Z. Horáka a F. Krupky* [3] (obr. 2).

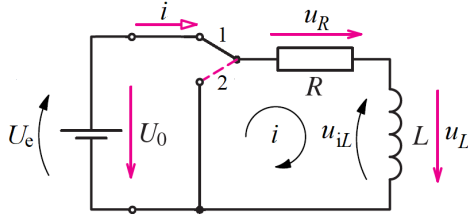


Obr. 1



Obr. 2

Podívejme se na přechodný děj v obvodu RL detailněji s použitím upraveného obrázku z učebnice (obr. 3; [1, obr. R6-6]).



Obr. 3

Zdroj budeme považovat za ideální ($R_i = 0$) a děj, kterým ve zdroji dochází k přenosu energie, je vyznačen orientovaným obloučkem. Tomu ději odpovídá elektromotorické napětí U_e a na svorkách zdroje je svorkové napětí U_0 . V našem případě ideálního zdroje je $U_e = U_0$. Přepnutím spínače do polohy 1 je ke zdroji připojen obvod RL a proběhne přechodný děj. Po jeho odeznění nastane ustálený stav s konečnou hodnotou proudu a napětí na obvodových prvcích. V průběhu přechodného děje se mění hodnoty proudu i v obvodu a napětí u_R na rezistoru.

Mění se ovšem také napětí na cívce. Můžeme ho interpretovat dvojím způsobem: buď jako indukované elektromotorické napětí u_{iL} (na obr. 3 je vyznačeno orientovaným obloučkem), nebo jako napětí na svorkách cívky u_L . Napětí u_{iL} charakterizuje fyzikální děj, který je spojen s přeměnou elektrické energie na energii magnetického pole cívky a jeho polarita odpovídá Lenzovu zákonu. Svorkové napětí u_L nevyplývá z fyzikální podstaty děje a je, podobně jako svorkové napětí U_0 , měřitelné připojením voltmetru. Jeho polaritu určuje postupný pokles elektrického potenciálu v uzavřené smyčce tvořené obvodem. Takto chápané svorkové napětí je upřednostňováno v teorii elektrických obvodů, což vyhovuje potřebám elektrotechniků při měření obvodových veličin.

Přechodný děj popíšeme rovnicemi vyjadřujícími 2. Kirchhoffův zákon pro daný obvod. Podle tohoto zákona je součet napětí na obvodových prvcích roven součtu elektromotorických napětí v uzavřené smyčce. Platí tedy:

a) pro indukované napětí u_{iL}

$$u_R = U_e + u_{iL} \implies Ri = U_e - L \frac{di}{dt},$$

b) pro svorkové napětí u_L

$$u_R + u_L = U_0 \implies Ri + L \frac{di}{dt} = U_0.$$

Za předpokladu, že $U_e = U_0$, vedou oba popisy přechodného děje ke stejnému výsledku, kterým je diferenciální rovnice

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L}. \quad (1)$$

Přepojením spínače do polohy 2 je obvod RL zkratován, indukované napětí na cívce je zdrojem proudu v obvodu a přechodný děj popisuje diferenciální rovnice

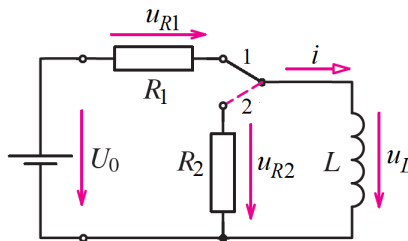
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0. \quad (2)$$

Řešení těchto rovnic, kterému odpovídá exponenciální závislost jednotlivých veličin na čase, se však vymyká možnostem běžné středoškolské výuky. Obsahují ho vysokoškolské učební texty, např. také učebnice [3]. Pro zájemce lze doporučit studijní text pro řešitele Fyzikální olympiády dostupný na webu [4]. Ve stručné podobě je obsaženo i ve Slovníčku fyzikálních pojmů, který je na CD přiloženém k učebnici.

Na středoškolské úrovni však jednoduše a velmi názorně ukážeme průběh přechodného děje pomocí počítačového modelu, který si mohou snadno vytvořit sami žáci.

Model přechodného děje

Počítačový model je vlastně numerickým řešením rovnice (1), popř. (2) postupem, označovaným také jako *dynamické modelování* (podrobněji viz např. [5]). Postup je takový, že z rovnice (1) určíme přírůstek di proudu v obvodu za časový interval dt , který označíme jako *časový krok*. Model pak tvoří posloupnost rovnic, jejichž výpočet se opakuje, až je dosaženo doby, kterou je možné považovat za odeznění přechodného děje (di v modelu nepředstavuje diferenciál proudu di , ale diferenci hodnot proudu mezi jednotlivými kroky výpočtu). Obvod, v němž probíhá modelovaný přechodný děj, je na obr. 4.



Obr. 4

Model přechodného děje v sériovém obvodu RL :

$$\begin{aligned} di &= \frac{U_0 - R_1 i_i}{L} dt \\ i_{i+1} &= i_i + di \\ u_R &= R_1 i_{i+1} \\ u_L &= L \frac{di}{dt} \\ t_{i+1} &= t_i + dt \end{aligned}$$

Obdobně vytvoříme model pro případ, že se spínač nachází v poloze 2. Model se nezmění, jen pro přírůstek proudu najdeme z rovnice (2) vztah

$$di = -\frac{R_2 i_i}{L} dt.$$

Model můžeme vytvořit různými postupy. V nejjednodušším případě použijeme tabulkový kalkulátor MS Excel. Tento postup je poměrně pracný a čtenáři ho usnadníme tím, že hotové modely přechodných dějů jsou přiloženy k tomuto příspěvku (do sešitu MS Excel přejdeme kliknutím [ZDE](#)).

Velmi snadno můžeme modely vytvořit použitím speciálního softwaru pro modelování fyzikálních dějů. Následující ukázka je vytvořena programem Modellus 4.01. Představuje přechodný děj v sériovém obvodu RL s parametry $L = 1$ H, $R_1 = 2$ Ω , $R_2 = 2,8$ Ω . Počátečními podmínkami jsou napětí zdroje $U_0 = 10$ V a počáteční proud $i = 0$. Výpis programu a časový diagram všech veličin přechodného děje je na obr. 5.

Model potvrzuje teoretický výsledek týkající se *časové konstanty* τ přechodného děje, která je u obvodu RL určena vztahem $\tau = L/R$. V našem případě $\tau = 0,5$ s (zvolené hodnoty příliš neodpovídají realitě, ale v modelu je dána přednost jednoduchosti před hodnotami odpovídajícími reálným obvodovým prvkům).

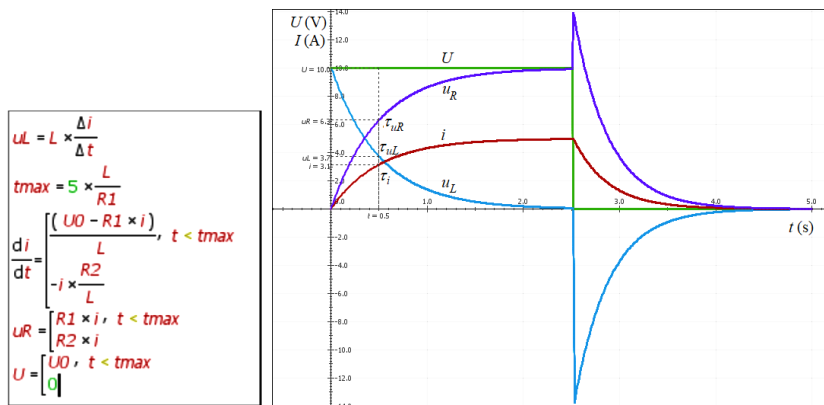
Za dobu časové konstanty vzroste napětí u_R na hodnotu

$$u_R(\tau) = (1 - e^{-1})U_0 = 0,63U_0$$

a napětí u_L se zmenší na hodnotu

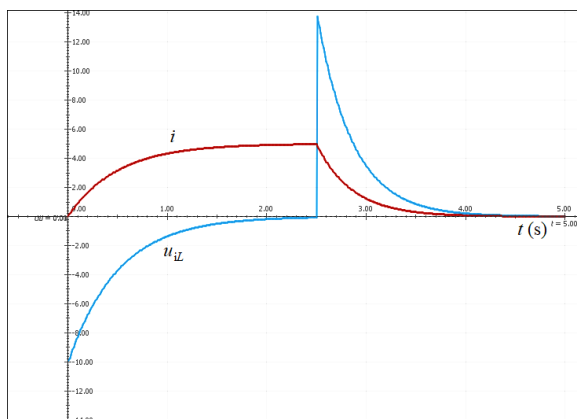
$$u_L(\tau) = e^{-1}U_0 = 0,37U_0,$$

kde e je Eulerovo číslo (podrobněji viz [4]). Přechodný děj teoreticky odeznívá nekonečně dlouho, avšak na modelu se můžeme přesvědčit, že za dobu $t = 5\tau$ již napětí na rezistoru dosahuje hodnoty $u_R = 0,99U_0$. Podle toho je v modelu také nastavena doba, za kterou přechodný děj přejde do druhé fáze děje, tzn. přepnutí spínače do polohy 2.



Obr. 5

Pokud bychom chtěli zobrazit graf časové závislosti indukovaného napětí na cívce, pozměníme znaménko ve výpočtu indukovaného napětí a získáme časový diagram shodný s učebnicí (obr. 6).



Obr. 6

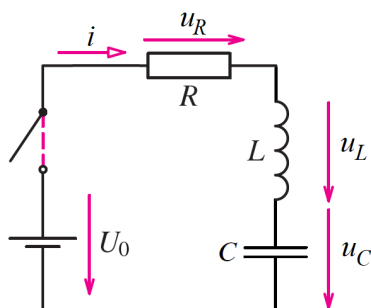
Přechodný děj v sériovém obvodu RL se týká tzv. *obvodu prvního řádu*, kdy obvod obsahuje jen jeden obvodový prvek schopný akumulovat energii, tzn. buď cívku, nebo kondenzátor. Zajímavý je průběh přechodného děje v *obvodu druhého řádu*, který obsahuje cívku i kondenzátor. Ukážeme to na přechodném ději v obvodu s RLC v sérii.

Uvažujeme obvod s RLC v sérii, který je připojen ke zdroji stejnosměrného napětí U_0 (obr. 7). Rovnice vyjadřující 2. Kirchhoffův zákon má tvar

$$u_R + u_L + u_C = U_0 \implies Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U_0.$$

a pro přírůstek proudu di platí

$$di = \frac{U_0 - Ri - \frac{q}{C}}{L} dt.$$



Obr. 7

Poněvadž obvod má jak indukčnost, tak kapacitu, jsou splněny podmínky pro vznik oscilací a obvod je vlastně elektromagnetickým tlumeným oscilátorem. Odpor obvodu určuje tlumení kmitů. Po připojení obvodu ke zdroji napětí se přechodný děj projeví vznikem elektrických kmitů s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

kde $\omega = 1/\sqrt{LC}$ je úhlová frekvence vlastního kmitání netlumeného elektromagnetického oscilátoru a $\delta = R^2/4L^2$ je součinitel tlumení. Kritické tlumení nastane, když $\omega_0 = \delta$, a z této podmínky vyplývá hodnota odporu,

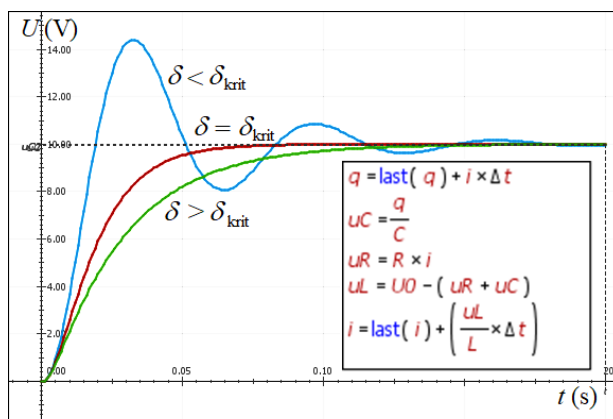
při němž se kmitání obvodu v nejkratší době utlumí:

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

V našem modelu je při zadaných výchozích parametrech ($L = 1 \text{ H}$ a $C = 100 \text{ } \mu\text{F}$) $R_k = 200 \text{ } \Omega$. Děj je popsán modelem:

$$\begin{aligned} di &= \frac{U_0 - R_1 i_i}{L} dt \\ q_i &= C u_C \\ q_{i+1} &= q_i + i_i \cdot dt \\ u_C &= \frac{q_{i+1}}{C} \\ u_R &= R_1 i_i \\ u_L &= U_0 - u_R - u_C \\ t_{i+1} &= t_i + dt \end{aligned}$$

Grafický výstup modelu vytvořeného programem Modellus je na obr. 8. Model v programu MS Excel je v příloze k příspěvku. Pro úplný přehled základních typů přechodných dějů jsou modely v příloze doplněny také modelem přechodného děje v sériovém obvodu RC .



Obr. 8

Závěr

Příspěvek ukázal, že v úvodu citovaná kritika pisatele mailu je tak trochu „bouře ve sklenici vody“. Je však možné souhlasit, že by žáci měli být s možnými interpretacemi napětí na cívce seznámeni. Pomohlo by jim to také lépe pochopit 2. Kirchhoffův zákon, s nímž se setkávají převážně jen v souvislosti s obvody tvořenými rezistory.

Výklad dějů v elektrických obvodech s parametry R , L a C se ve středoškolské fyzice tradičně omezuje převážně na obvody střídavého proudu, tedy na děje odpovídající harmonickému průběhu obvodových veličin. To je dáno návazností výkladu na využití střídavých proudů v energetice. Pro praxi je však stále významnější uplatnění dějů v obvodech s R , L a C v elektronice, v obvodech zpracovávajících signály různého časového průběhu. Vývoj elektroniky zejména v komunikační technice jednoznačně směřuje ve stále větší míře k digitálním signálům, charakteristickým skokovými změnami elektrického napětí a proudu. Proto by i ve středoškolské výuce fyziky měla být větší pozornost věnována přechodným dějům, kdy elektrický obvod přechází z jednoho stabilního stavu do jiného stabilního stavu, popř. dochází ke skokové změně napětí periodicky.

Literatura

- [1] Lepil, O., Šedivý, P.: Fyzika pro gymnázia. Elektrina a magnetismus. 7. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2017.
- [2] Lepil, O.: K vývoji učebnic fyziky pro střední školu gymnaziálního typu. MFI, roč. 22 (2014), č. 4, s. P16. Dostupné na: <http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/78/0>
- [3] Horák, Z., Krupka, F.: Fyzika. SNTL/SVTL, Praha, 1966.
- [4] Vybíral, B.: Elektromagnetická indukce. Studijní text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku. Dostupné na: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/indukce.pdf>
- [5] Lepil, O., Richterek, L.: Dynamické modelování, Repronis, Ostrava, 2007. Dostupné na: http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni.php