

Příloha časopisu  
**MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA**  
Ročník 27 (2018), číslo 3

Úlohy I. kola (domácí část)  
68. ročníku MO (kategorie A, B, C)

KATEGORIE A

**A–I–1**

O posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  víme, že pro všechna přirozená čísla  $n$  platí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

- a) Najděte všechny hodnoty  $a_1$ , pro které je tato posloupnost konstantní.  
b) Nechť  $a_1 = 5$ . Určete největší celé číslo nepřevyšující  $a_{2018}$ .

*(Vojtech Bálint)*

**A–I–2**

Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$ . Označme  $D$  patu výšky z vrcholu  $A$  a  $D_1, D_2$  obrazy bodu  $D$  v osových souměrnostech po řadě podle přímek  $AB, AC$ . Dále označme  $E_1$  a  $E_2$  body na přímce  $BC$  takové, že  $D_1E_1 \parallel AB$  a  $D_2E_2 \parallel AC$ . Dokažte, že body  $D_1, D_2, E_1, E_2$  leží na téže kružnici, jejíž střed leží na kružnici opsané trojúhelníku  $ABC$ .

*(Patrik Bak)*

**A–I–3**

Najděte všechna nezáporná celá čísla  $m, n$ , pro něž platí

$$|4m^2 - n^{n+1}| \leq 3.$$

*(Tomáš Jurík)*

**A–I–4**

Je dána množina  $M$  přirozených čísel s  $n$  prvky, kde  $n$  je liché číslo větší než jedna. Dokažte, že počet uspořádaných dvojic  $(p, q)$  různých prvků z  $M$  takových, že aritmetický průměr čísel  $p, q$  je prvkem  $M$ , je nejvýše  $\frac{1}{2}(n-1)^2$ .

(*Martin Panák, Patrik Bak*)

**A–I–5**

Sestrojte trojúhelník  $ABC$ , znáte-li jeho obvod  $o$ , poloměr  $\rho$  kružnice připsané ke straně  $BC$  a velikost výšky  $v$  na tuto stranu. Proveďte diskusi v závislosti na daných délkách.

(*Patrik Bak*)

**A–I–6**

Na hrací desce je nakreslen pravidelný  $n$ -úhelník s jedním vrcholem vyznačeným jako past. Tom a Jerry hrají následující hru. Na počátku Jerry postaví figurku na některý vrchol  $n$ -úhelníku. V každém kroku pak Tom řekne nějaké přirozené číslo a Jerry posune figurku o tento počet vrcholů podle své volby buď ve směru, anebo proti směru chodu hodinových ručiček. Najděte všechna  $n \geq 3$ , při kterých může Jerry tahat figurkou tak, aby nikdy neskončila v pasti. Jak se změní odpověď, když je Tom k desce otočen zády, zná jen dané  $n$  a nevidí, kam Jerry figurku na počátku postaví ani kam s ní v jednotlivých krocích táhne?

(*Pavel Calábek*)

## KATEGORIE B

**B–I–1**

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

(*Pavel Calábek*)

**B–I–2**

V trojúhelníku  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $A$  platí  $|AB| = 4$  a  $|AC| = 3$ . Označme  $M$  střed přepony  $BC$  a  $N$  průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu  $B$  s odvěsnou  $AC$ . Úsečky  $AM$  a  $BN$  se protnou v bodě, který označíme  $K$ . Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku  $BAK$  a čtyřúhelníku  $CNKM$ .

(*Patrik Bak*)

**B–I–3**

Úpravou přirozeného čísla nazveme následující operaci: je-li číslo sudé, vydělíme je dvěma; je-li liché, připočteme k němu číslo 1.

- Dokažte, že z libovolného přirozeného čísla dostaneme po několika úpravách číslo 1.
- Pro které z čísel  $1, 2, \dots, 10^6$  budeme potřebovat největší počet úprav, než získáme číslo 1?

(*Ján Mazák*)

**B–I–4**

Pro nezáporná reálná čísla  $a, b$  platí  $a^2 + b^2 = 1$ . Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

(*Patrik Bak, Jaromír Šimša*)

**B–I–5**

Nechť  $ABCD$  je konvexní čtyřúhelník, v němž  $AD \perp BD$ . Označme  $M$  průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět  $P$  bodu  $M$  na přímkou  $AB$  a kolmý průmět  $Q$  bodu  $B$  na přímkou  $AC$ . Dokažte, že bod  $M$  je středem kružnice vepsané trojúhelníku  $PQD$ .

(*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

**B–I–6**

Konečnou množinu přirozených čísel nazveme *pěknou*, jestliže k výpisu těchto čísel v desítkové soustavě potřebujeme sudý počet každé ze zastoupených číslic. Pěknými množinami jsou např.  $\{11, 13, 31\}$ ,  $\{10, 100, 110\}$  a také prázdná množina. Určete, kolik je všech pěkných podmnožin množiny  $\{1, 2, \dots, 2018\}$ .

(*Patrik Bak*)

## KATEGORIE C

**C–I–1**

Neznámé číslo je dělitelné právě čtyřmi čísly z množiny  $\{6, 15, 20, 21, 70\}$ . Určete, kterými.

(*Michal Rolínek*)

**C-I-2**

Uvnitř strany  $AB$  trojúhelníku  $ABC$  jsou dány body  $D$  a  $E$  tak, že

$$|AD| = |DE| = |EB|.$$

Body  $A$  a  $B$  jsou po řadě středy úseček  $CF$  a  $CG$ . Přímka  $CD$  protíná přímku  $FB$  v bodě  $I$  a přímka  $CE$  protíná přímku  $AG$  v bodě  $J$ . Dokažte, že průsečík přímek  $AI$  a  $BJ$  leží na přímce  $FG$ .

(Pavel Calábek)

**C-I-3**

Nechť  $a, b, c$  jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(Patrik Bak)

**C-I-4**

Každé pole tabulky  $2 \times 13$  obarvíme právě jednou ze čtyř barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? (Za sousední považujeme právě ta pole tabulky, která mají společnou stranu.)

(Jaroslav Švrček)

**C-I-5**

Nechť  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \psi, \omega$  značí po řadě velikosti vnitřních úhlů při vrcholech  $A, B, C, D, E, F, G, H$  konvexního osmiúhelníku  $ABCDEFGH$ , v němž platí

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Označme dále  $K, L, M, N$  po řadě středy úhlopříček  $AD, CF, EH, GB$ . Dokažte, že přímky  $KM$  a  $LN$  jsou navzájem kolmé.

(Josef Tkadlec)

**C-I-6**

Najděte všechna trojmístná čísla  $n$  s třemi různými nenulovými číslicemi, která jsou dělitelná součtem všech tří dvojmístných čísel, jež dostaneme, když v původním čísle vyškrtneleme vždy jednu číslici.

(Jaromír Šimša)