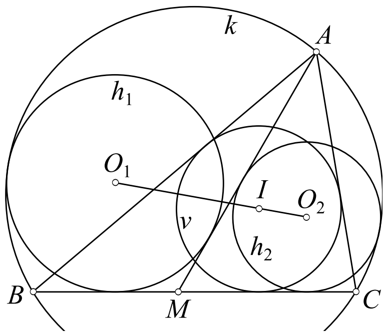
MATEMATIKA

Thébaultův problém 3887

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Francouz *Victor Michael Jean-Marie Thébault* (1882–1960) byl původně učitelem matematiky. V roce 1910 změnil zaměstnání, protože měl již šest dětí a učitelský plat na zajištění rodiny nestačil. Vypracoval se na inspektora pojišťovny a ve volném čase se věnoval hlavně elementární geometrii a teorii čísel. Získal velkou popularitu mezi matematiky. V různých časopisech publikoval více než 1 000 problémů, z toho asi 600 v The American Mathematical Monthly (dále jen Monthly). Tam mu v roce 1938 zveřejnili jeho údajně nejslavnější problém č. 3887, jemuž je věnován tento článek.



Obr. 1 Ilustrace k problému 3887

Problém 3887 (*Upravený překlad z časopisu Monthly.*)

Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je zvolen bod M. Kružnice $h_1(O_1; r_1)$ a $h_2(O_2; r_2)$ vepsané do úhlů AMB a AMC mají vnitřní dotyk s kružnicí trojúhelníku opsanou (obr. 1). Je-li φ velikost úhlu AMC a

$v(I;\rho)$ kružnice trojúhelníku vepsaná, pak přímka O_1O_2 prochází bodem I,

$$\frac{|O_2I|}{|O_1I} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \tag{1}$$

a

$$r_1 + r_2 = \rho^2 \sec^2 \frac{\varphi}{2}. \tag{2}$$

Poznamenejme, že vztah (2) je zřejmě nepravdivý (nevyhovuje ani rozměrově). Řešitelé problému jej později nahradili správným vztahem

$$r_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + r_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \rho. \tag{3}$$

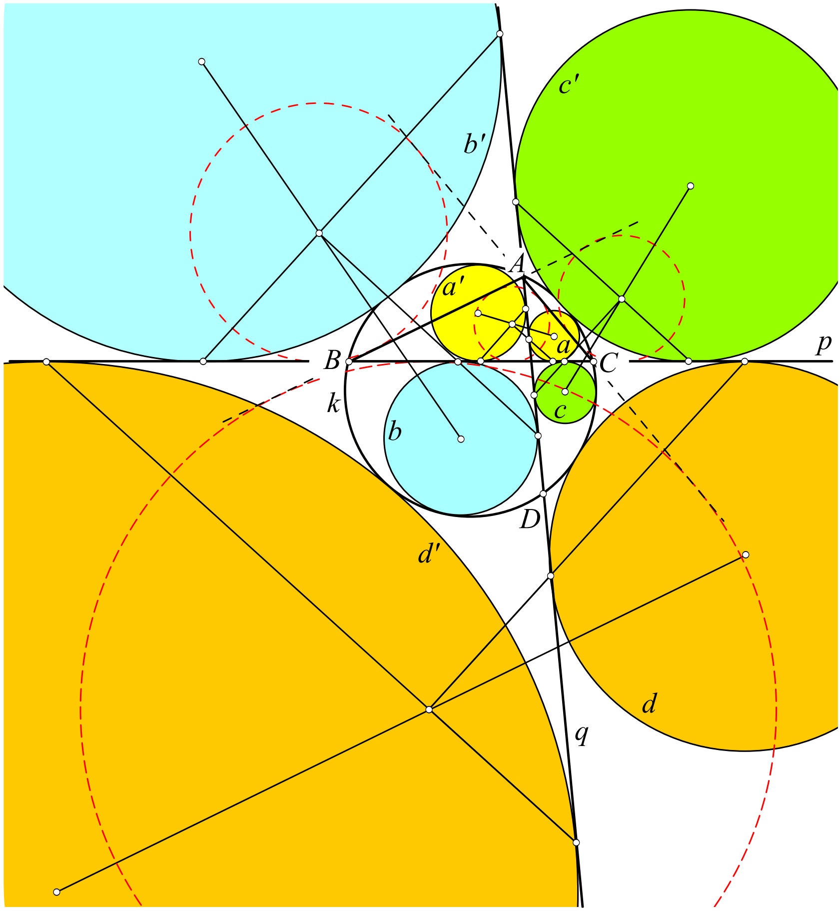
Je zarážející, že Thébaultovo tvrzení o kolineárnosti bodů O_1, O_2 a I tvoří část obecnější věty kterou v témže časopise dokázal japonec Y. Sawayama [3] o 33 let dříve. Třístránkový článek nějakého instruktora Ústřední vojenské školy v Tokiu čtenáře pravděpodobně nezaujal a brzy se na něj zapomnělo.

Sawayama se zabýval množinou osmi kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a jejích sečen p a q s průsečíkem uvnitř kružnice (obr. 2). Dokázal, že pro libovolný ze čtyř možných trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v průsečících kružnice se sečnami, lze kružnice množiny rozdělit do čtyř dvojic tak, že v každé dvojici se středná a přímky procházející body dotyku přímek p, q s každou z obou kružnic protínají ve středu kružnice buď vepsané, nebo připsané zvolenému trojúhelníku.

Na obr. 2 vidíme jednu z možných situací. Zvolen je trojúhelník ABC, příslušné kruhy mají v každé dvojici stejnou barvu. Žluté kruhy odpovídají situaci z Thébaultova problému.

Co se týká reakce matematiků na Thébaultův problém, není známo žádné řešení z období let 1938 až 1972. V roce 1962 připomněl Thébaulův problém C. S. Ogilvy v publikaci *Matematika zítřka, nevyřešené problémy pro amatéry.* Zmínil zde, že úloha je mimořádně obtížná, avšak zřejmě řešitelná elementárními metodami. Teprve po překladu knihy do němčiny (1969) a jejím druhém vydání v angličtině (1972) se začínají objevovat první publikované příspěvky k problému.

Holandští matematici, H. Streefkerk, B. C. Dijkstra-Kluyver a G. R. Veldkamp uvedli v letech 1973 a 1974 několik různých řešení v časopise *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.* Jejich práce nepronikly za hranice Holandska.



Obr. 2 Sawayamovy kružnice

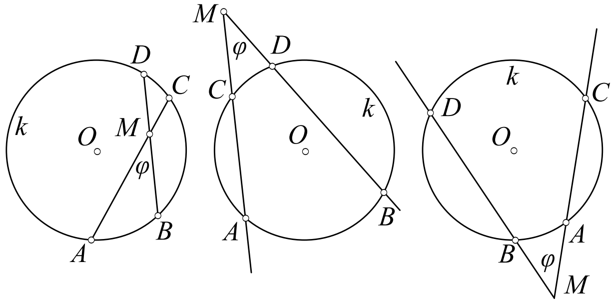
Jako první poslal své řešení do Monthly B. J. English v roce 1975. To se však někde v redakci ztratilo a bylo otištěno až v roce 2003. Vešlo se na dvě stránky.

První řešení zmíněné v Monthly [4] je z roku 1983 a pochází od K. V. Taylora. Údajně má rozsah 24 stránek. Původní příspěvek však editor časopisu s omluvou autorovi zredukoval na půl stránky, takže se z toho čtenář moc nedozví. Pověst o obtížnosti důkazu nyní již *Thébaultovy věty* vzrostla a následovala řada dalších příspěvků.

Na existenci Sawayamova článku [3] upozornil roku 2003 Jean-Luis Ayme [1] po zpřístupnění prvních ročníků Monthly na *JSTOR*. Od té doby se prosazuje název *Sawayamova–Thébaultova věta*.

Tvrzení o kolineárnosti bodů O_1, O_2 a I můžeme pokládat za důsledek několika geometrických vět, s nimiž se nyní seznámíme. První tři z nich připomínají základní poznatky. Protože budeme pracovat s úhly v kružnici, upřesníme nejprve některé pojmy.

Body A, B kružnice k určují dva oblouky. V zájmu jednoznačnosti budeme rozlišovat oblouk AB od oblouku BA. První z nich je určen pohybem po kružnici od A k B druhý pohybem od B k A. Přitom oba pohyby jsou proti směru pohybu hodinových ručiček. Velikost orientovaného středového úhlu AOB budeme nazývat *úhlová velikost oblouku* AB a značit ω_{AB}.



Obr. 3 Věta o úhlu sečen

Věta 1 (*o úhlu sečen*)

Nechť AC a BD jsou sečny z bodu M ke kružnici k a $\varphi = |\sphericalangle AMB|$. Pak pro každou ze situací znázorněných na obr. 3 platí

$$2\varphi = |\omega_{AB} + \omega_{CD}|. \tag{4}$$

Důkaz. Středem O kružnice k veďme tětivy $VY \parallel AC$ a $XZ \parallel BD$ (obr. 4).

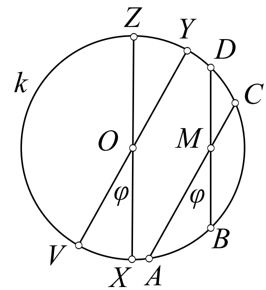
Platí $\omega_{VX} = \omega_{YZ} = \varphi$, $\omega_{DZ} = \omega_{XB}$ a $\omega_{VA} = \omega_{CY}$, neboť oblouky ohraničené rovnoběžnými sečnami jsou shodné. Odtud

$$\omega_{DY} + \omega_{YZ} = \omega_{XA} + \omega_{AB} \quad \text{a} \quad \omega_{VX} + \omega_{XA} = \omega_{CD} + \omega_{DY}.$$

Sečtením obou rovností obdržíme $\omega_{YZ} + \omega_{VX} = \omega_{AB} + \omega_{CD}$ a odtud (3).

Poznámka. Umístěním sečen tak, aby platilo $C = D = M \in k$, dostaneme větu o obvodových úhlech:

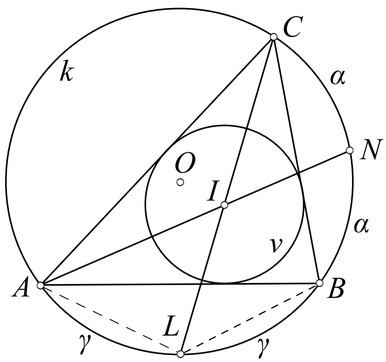
$$2\varphi = |\omega_{AB}|. \tag{5}$$



Obr. 4 K důkazu věty o úhlu sečen

Věta 2 (*Euler*)
Je-li L průsečík osy vnitřního úhlu ACB libovolného trojúhelníku ABC s opsanou kružnicí a I střed vepsané kružnice, pak

$$|AL| = |BL| = |IL|. \tag{6}$$



Obr. 5 K důkazu věty 2

Důkaz. Nechť osa úhlu BAC protíná opsanou kružnici v bodě N (obr. 5). Pomocí (5) snadno zjistíme $\omega_{AL} = \omega_{LB} = \gamma$ a $\omega_{BN} = \omega_{NC} = \alpha$. Ze shodnosti oblouků AL a LB plyne první z dokazovaných rovností.

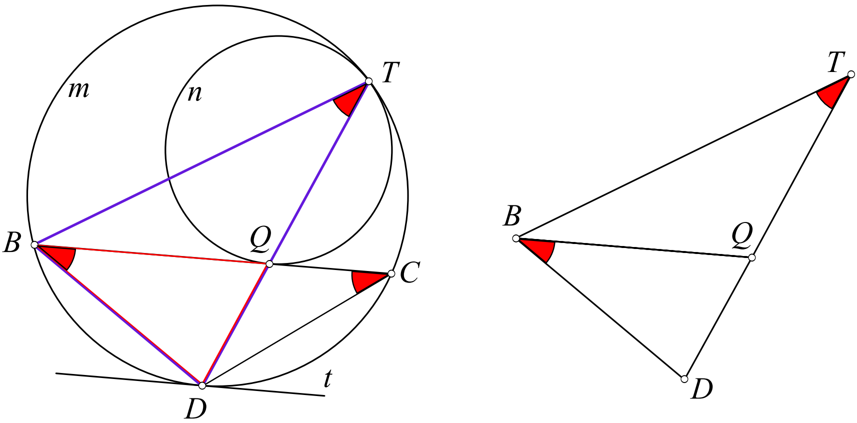
K důkazu druhé stačí ukázat, že $|\sphericalangle LAI| = |\sphericalangle AIL|$. To však plyne z aplikace vztahu (4) na dvojice tětiv LA, NA a AN, LC:

$$2|\sphericalangle LAI| = 2|\sphericalangle LAN| = |\omega_{LB} + \omega_{BN}| = \gamma + \alpha = |\omega_{AL} + \omega_{NC}| = 2|\sphericalangle AIL|.$$

Věta 3 (*zobecnění Eukleidovy věty o odvěsně*)

Nechť má kružnice n vnitřní dotyk s kružnicí m v bodě T a tětiva BC kružnice m se dotýká kružnice n v bodě Q (obr. 6). Je-li $D \neq T$ průsečík kružnice m s přímkou TQ, pak platí

$$|DB|^2 = |DT| \cdot |DQ|. \tag{7}$$



Obr. 6 K důkazu věty 3

Důkaz. Stejnolehlost se středem T, jež převádí kružnici n na kružnici m, zobrazí tečnu BC kružnice n na tečnu t kružnice m, přičemž $t \parallel BC$. Bod D je obrazem bodu Q. Je tedy bodem dotyku kružnice m s přímkou t a proto i středem oblouku BC. Shodným obloukům DC a BD odpovídají shodné tětivy i shodné obvodové úhly DBC, BCD a BTD (obr. 6). Trojúhelníky BDQ a TDB mají navíc společný úhel při vrcholu D. Z jejich podobnosti podle věty *uu* plyne $\frac{|DB|}{|DT|} = \frac{|DQ|}{|DB|}$ a odtud (7).

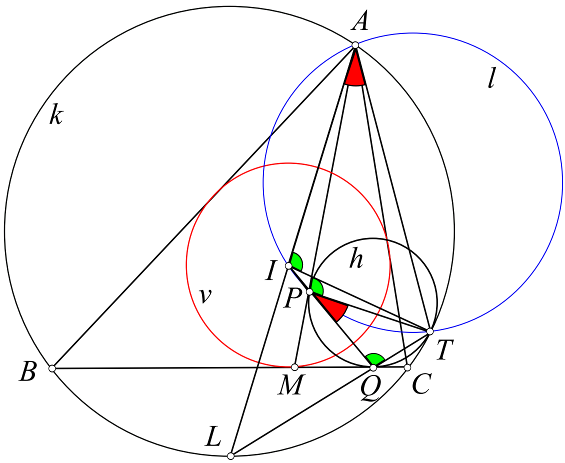
Poznámka. Za předpokladu $|\sphericalangle DBQ| = |\sphericalangle BTD|$ platí vztah (7) pro každý trojúhelník BDT s bodem Q uvnitř strany DT (obr. 7 vpravo). Má-li tento trojúhelník pravý úhel při vrcholu B, je bod Q patou jeho výšky a vztah vyjadřuje Eukleidovu větu o odvěsně.

Věta 4

Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC je zvolen bod M a do úhlu AMC vepsána kružnice h tak, že má vnitřní dotyk T s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC. Střed kružnice trojúhelníku vepsané označme I. Kružnice h se dotýká úsečky MB v bodě Q a protíná úsečku QI v bodě P. Pak platí:

a) Čtyřúhelník $ATPI$ je tětivový,

b) P je bodem dotyku kružnice h s přímkou AM.



Obr. 7 K důkazu věty 4

Důkaz

a) Stejnolehlost se středem T, jež převádí kružnici h na kružnici k, zobrazí oblouk TQ na oblouk TL (obr. 6). Obvodové úhly QPT a LAT jsou proto shodné a platí $|\sphericalangle IAT| + |\sphericalangle TPI| = |\sphericalangle QPT| + |\sphericalangle TPI| = 180°$. Čtyřúhelník $ATPI$ je tětivový.

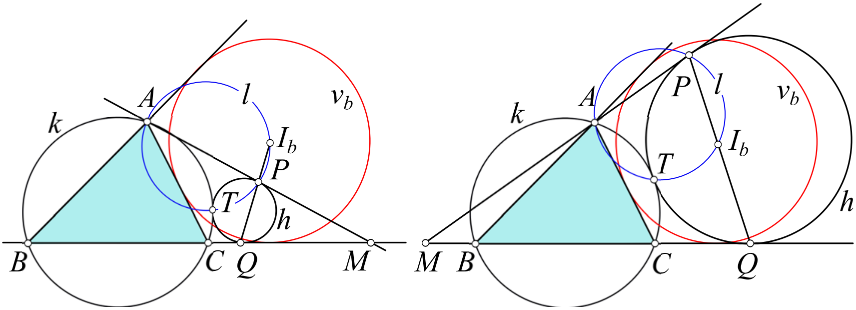
b) Užitím (7) a (6) zjistíme $|LI|^2 = |LQ| \cdot |LT|$, neboli

$$\frac{|LI|}{|LT|} = \frac{|LQ|}{|LI|}.$$

Trojúhelníky LQI a LIT jsou podle věty *sus* podobné (shodují se v úhlu při vrcholu L a poměru přilehlých stran). Mají tedy shodné vnější úhly TQI a TIA. I obvodové úhly TIA a TPA jsou shodné.

Z rovností $|\sphericalangle TQP| = |\sphericalangle TQI| = |\sphericalangle TPA|$ pak plyne, že AM je tečna ke kružnici h.

Větu 4 lze analogicky vyslovit a dokázat i pro vnější dotyk kružnic h, k. Střed kružnice vepsané je ovšem nutno nahradit středem některé z připsaných kružnic. Dokonce ji lze zformulovat a dokázat pro situace, kdy bod M leží vně trojúhelníku na prodloužené straně BC. (Některé z nich znázorňuje obr. 8.)



Obr. 8 Sawayamovo lemma, vnější situace

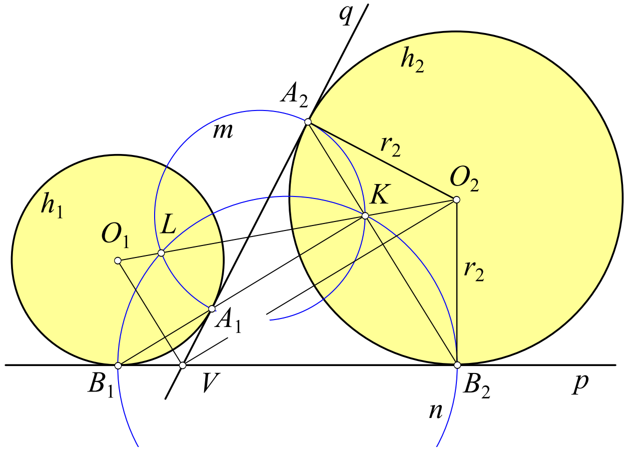
Sawayama vyšetřil všechny tyto situace metodami podobnými našemu postupu. Výsledek lze shrnout do věty 5, kterou uvádíme jako ekvivalenci. (Platnost obrácené implikace je důsledkem faktu, z faktu, že všechny kružnice vepsané do daného úhlu mají tětivy s krajními body v bodech dotyku kružnice s rameny úhlu navzájem rovnoběžné.)

Věta 5 (*Sawayamovo lemma*).
Nechť je dán trojúhelník ABC s bodem M na přímce BC různým od vrcholů B a C. Kružnice, která se dotýká přímek AM a BC v bodech P a Q, má dotyk s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC, právě když přímka PQ prochází středem kružnice trojúhelníku buď vepsané, nebo připsané.

Věta 6
Mají-li kružnice $h_1(O_1; r_1)$ a $h_2(O_2; r_2)$ společnou vnitřní tečnu p s body dotyku A_1 a A_2 a vnější tečnu q s body dotyku B_1 a B_2, pak se přímky A_1B_1, A_2B_2, a O_1O_2, protínají v jediném bodě.

Důkaz. Přímky VO_1 a VO_2 jsou navzájem kolmé, neboť to jsou osy různoběžek p, q. Snadno nahlédneme, že $A_1B_1 \perp VO_1$ a $A_2B_2 \perp VO_2$. Přímky A_1B_1 a A_2B_2 tedy svírají pravý úhel a jejich průsečík K leži v průniku Thaletových kružnic m a n s průměry A_1A_2 a B_1B_2.

Nechť L je druhý průsečík kružnic m a n. Přímka KL je jejich chordála. Střed O_2 kružnice h_2 na ní leží, protože má stejnou mocnost r_2^2 od obou kružnic. Analogicky zdůvodníme, že i bod O_1 leží na přímce KL.



Obr. 9 K důkazu věty 6

Řešení problému 3887

Označme s_i $(i \in \{1,2\})$ tu sečnu kružnice h_i, která prochází body dotyku s jejími tečnami z bodu M (obr. 10. Průsečíkem přímek s_1 a s_2 je podle věty 5 bod I. Podle věty 6 leží tento průsečík i na středné O_1O_2. Body O_1, O_2 a I jsou tedy kolineární.

K důkazu trigonometrických vztahů použijeme obr. 10, kde J je průsečík přímek s_1 a O_1M, bod F průsečík přímek s_2 a O_2M. Paty kolmic z bodů O_1, J, I, F a O_2 na přímku BC jsou po řadě T_1, K, T, G a T_2; $|TI| = \rho$ a $|O_iT_i| = r_i$. Z předchozích výsledků plyne, že $JMFI$ je pravoúhelník a že všechny úhly vyznačené na obrázku mají velikost $\frac{\varphi}{2}$.

Důkaz vztahu (1). Z pravoúhlých trojúhelníků T_1IT a IT_2T plyne

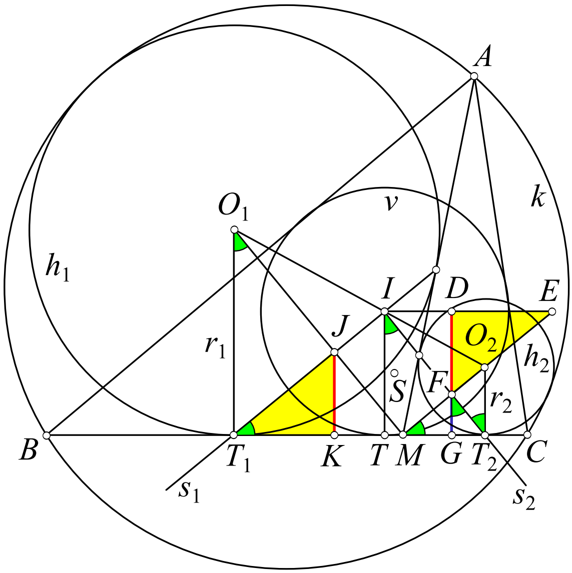
$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{|IT|}{|T_1T|} \cdot \frac{|T_2T|}{|IT|} = \frac{|T_2T|}{|T_1T|} = \frac{|O_2I|}{|O_1I|},$$

neboť rovnoběžné promítání zachovává poměry délek na přímce.

Důkaz rovnosti (3). Z podobných pravoúhlých trojúhelníků T_1JK a O_1T_1J dostáváme

$$|JK| = |T_1J| \sin \frac{\varphi}{2} = r_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Z trojúhelníků FT_2G a T_2O_2F pak analogicky plyne $|FG| = r_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$.



Obr. 10 K důkazu problému 3887

Souměrnost podle středu S pravoúhelníku $IJMF$ zobrazuje bod J na bod F a úsečku MT_1 na úsečku $IE \parallel BC$. Trojúhelník KJT_1 zobrazuje na trojúhelník DFE. Platí tedy

$$\rho = |IT| = |DG| = |DF| + |FG| = |JK| + |FG| = r_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + r_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Závěr

Příspěvek vznikl z autorovy přednášky na Soustředění nejlepších řešitelů 65. ročníku MO (Janské Lázně, 2016). Lze jej využít pro práci s matematickými talenty na střední škole.

Tak zvaná Sawayamova–Thébaultova věta tvoří jen část toho, co uvedl Sawayama. Přidané trigonometrické vztahy lze považovat za pouhý doplněk k zásadnímu poznatku, kolinearitě bodů O_1, O_2 a I.

Sawayamův výsledek je obecnější, týká se i kružnic s vnějšími dotyky a neváže se na jediný trojúhelník. Měl by se formulovat samostatně jako *Sawayamova věta*, jejímž důsledkem je například Feuerbachova věta. K této problematice se vrátíme v některém z příštích čísel časopisu.

Literatura

[1] *Ayme, J.-L.:* Sawayama and Thébault's theorem, Forum Geometricorum, roč. 3 (2003), s. 225–229. Dostupné na: http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325index.html

[2] *Ogilvy, C. S.:* Tomorrow's math, unsolved problems for amateur, Oxford University Press, 1972, s. 82–83.

[3] *Sawayama, Y.:* A new geometrical proposition, The American Mathematical Monthly, roč. 12 (1905), č. 12, s. 222–224. Dostupné na: http://www.jstor.org/action/showAdvancedSearch

[4] *Taylor, K. B.:* Solution of Problem 3887, The American Mathematical Monthly, roč. 90 (1983), č. 7, s. 486–487.

O jedné úloze z AIME

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Ve Spojených státech amerických existuje nepřeberné množství nejrůznějších matematických soutěží. K nejprestižnějším patří samozřejmě USAMO (matematická olympiáda Spojných států), jejíž nejúspěšnější řešitelé reprezentují USA na mezinárodní matematické olympiádě. USAMO je organizována v několika kvalifikačních kolech s rostoucí obtížností (např. v roce 2013 se z počátečních 350 000 řešitelů kvalifikovalo do finálové části jen 264 nejlepších). Ve druhém kole (označovaném jako AIME – American Invitational Mathematics Examination) řeší studenti 15 úloh během tří hodin z nejrůznějších témat středoškolské matematiky. Řešení problémů v tomto kole již vyžaduje nejenom „kreativní“ užití matematických znalostí, ale i značnou obratnost, neboť studenti mají na řešení jedné úlohy v průměru 12 minut. Pravidelně se objevují i úlohy z počtu pravděpodobnosti, které vždy patří k těm obtížnějším a časově náročnějším. Na druhé straně se u nich v největší míře uplatňuje kreativita řešitelů, tj. obvykle se najde několik zcela různých řešení, jak si ukážeme na 15. úloze z roku 1995.