L i t e r a t u r a

[1] *Ayme, J.-L.:* Sawayama and Thébault's theorem, Forum Geometricorum, roč. 3 (2003), s. 225–229. Dostupné na: http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325index.html

[2] *Ogilvy, C. S.:* Tomorrow's math, unsolved problems for amateur, Oxford University Press, 1972, s. 82–83.

[3] *Sawayama, Y.:* A new geometrical proposition, The American Mathematical Monthly, roč. 12 (1905), č. 12, s. 222–224. Dostupné na: http://www.jstor.org/action/showAdvancedSearch

[4] *Taylor, K. B.:* Solution of Problem 3887, The American Mathematical Monthly, roč. 90 (1983), č. 7, s. 486–487.

O jedné úloze z AIME

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Ve Spojených státech amerických existuje nepřeberné množství nejrůznějších matematických soutěží. K nejprestižnějším patří samozřejmě USAMO (matematická olympiáda Spojných států), jejíž nejúspěšnější řešitelé reprezentují USA na mezinárodní matematické olympiádě. USAMO je organizována v několika kvalifikačních kolech s rostoucí obtížností (např. v roce 2013 se z počátečních 350 000 řešitelů kvalifikovalo do finálové části jen 264 nejlepších). Ve druhém kole (označovaném jako AIME – American Invitational Mathematics Examination) řeší studenti 15 úloh během tří hodin z nejrůznějších témat středoškolské matematiky. Řešení problémů v tomto kole již vyžaduje nejenom „kreativní" užití matematických znalostí, ale i značnou obratnost, neboť studenti mají na řešení jedné úlohy v průměru 12 minut. Pravidelně se objevují i úlohy z počtu pravděpodobnosti, které vždy patří k těm obtížnějším a časově náročnějším. Na druhé straně se u nich v největší míře uplatňuje kreativita řešitelů, tj. obvykle se najde několik zcela různých řešení, jak si ukážeme na 15. úloze z roku 1995.

AIME 1995 – 15. úloha

Označme p pravděpodobnost, že při opakovaném hodu (symetrickou) mincí se objeví posloupnost pěti po sobě jdoucích rubů dříve než posloupnost dvou po sobě jdoucích líců. Hledané p zapíšeme ve tvaru $\frac{m}{n}$*, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Kolik je* $m+n$*?*

Nejdříve si ukážeme originální řešení uvedené v [4].

1. řešení

Spočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu, tj. určíme s jakou pravděpodobností se objeví dříve posloupnost ll než posloupnost $rrrrr$. Označme r_i pravděpodobnost, že posloupnost ll nastane dříve než posloupnost $rrrrr$, pokud v i posledních hodech padl rub (jde tedy o podmíněnou pravděpodobnost). Podobně označíme l_i pravděpodobnost, že posloupnost ll nastane dříve než posloupnost $rrrrr$, pokud v i posledních hodech padl líc. Pak platí, že $r_5 = 0$ a $l_2 = 1$. Pokud budeme znát r_1 a l_1, je hledaná pravděpodobnost rovna

$$\frac{1}{2}\Big(r_1 + l_1\Big),$$

neboť v prvním hodu nám se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$ padne rub, nebo líc. Pro l_1 platí, že

$$l_1 = \frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{2}r_1,$$

protože pokud v posledním hodu padl líc, tak v následujícím hodu padne líc s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a jsme ve stavu l_2 nebo se stejnou pravděpodobností padne rub a dostaneme se do stavu r_1. Podobně platí:

$$r_1 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{2}l_1,$$

$$r_2 = \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}l_1,$$

$$r_3 = \frac{1}{2}r_4 + \frac{1}{2}l_1,$$

$$r_4 = \frac{1}{2}r_5 + \frac{1}{2}l_1.$$

Vzhledem k tomu, že $r_5 = 0$, dostaneme z poslední rovnice, že $r_4 = \frac{1}{2}l_1$. Dále postupně dostaneme

$$r_3 = \frac{1}{2}r_4 + \frac{1}{2}l_1 = \frac{3}{4}l_1, \quad r_2 = \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}l_1 = \frac{7}{8}l_1, \quad r_1 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{2}l_1 = \frac{15}{16}.$$

Protože

$$l_1 = \frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{2}r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16}l_1, \quad \text{tak} \quad l_1 = \frac{16}{17} \quad \text{a} \quad r_1 = \frac{15}{16}\cdot\frac{16}{17} = \frac{15}{17}.$$

Víme tedy, že posloupnost ll nastane dříve než posloupnost $rrrrr$, s pravděpodobností $\frac{1}{2}(r_1 + l_1) = \frac{31}{34}$. Opačný jev nastane s pravděpodobností $p = \frac{3}{34}$ a tedy $m = 3$ a $n = 34$. Součet $m + n$ je roven 37.

V publikaci [1] najdeme jiné řešení, které uvádíme v originálním znění. Tento přístup se zdá rychlejší, ale to může být způsobeno tím, že jsou vynechány některé úvahy nebo výpočty (např. vyřešení soustavy rovnic).

2. řešení

Posloupnost rubů a líců nazveme *úspěšnou*, pokud se v této posloupnosti řetězec $rrrrr$ objeví dříve než řetězec ll. Úspěšné posloupnosti jsou trojího druhu:

(i) První písmeno je l, pak následuje úspěšná posloupnost s prvním písmenem r.

(ii) Na počáteční znak/y r, rr, rrr, nebo $rrrr$ navazuje úspěšná posloupnost začínající znakem l.

(iii) Posloupnost $rrrrr$.

Označme P_r pravděpodobnost, že získáme úspěšnou posloupnost začínající znakem r a P_l pravděpodobnost, že získáme úspěšnou posloupnost začínající znakem l. Pak

$$\begin{aligned} P_l &= \frac{1}{2}P_r \\ P_r &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)P_l + \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Po vyřešení této soustavy rovnic dostaneme

$$P_r = \frac{1}{17} \quad \text{a} \quad P_l = \frac{1}{34}.$$

Pak

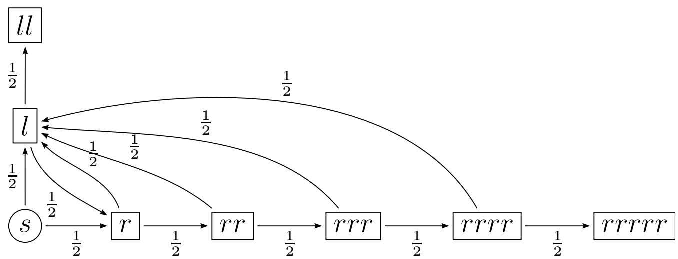
$$p = \frac{1}{17} + \frac{1}{34} = \frac{3}{34}$$

a tedy $m = 3$ a $n = 34$. Součet $m + n$ je roven 37.

Je zřejmé, že obě uvedená řešení vyžadují podstatně více času než jen 12 minut. Autorům tohoto příspěvku se podařilo najít ještě tři jiná řešení. Dvě z nich jsou časově přibližně stejně náročná jako 1. a 2. řešení. Nejjednodušší a časově nejrychlejší řešení využívající vlastností stochastického grafu si nyní ukážeme i s podrobným vysvětlením.

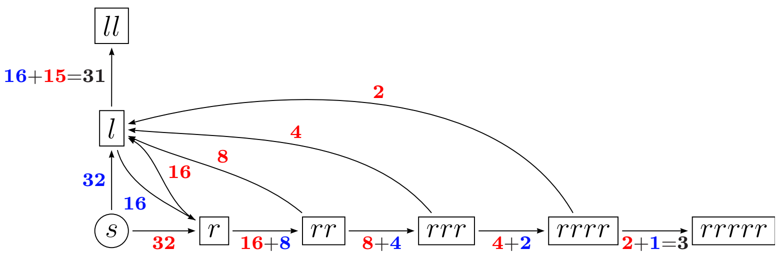
3. řešení

Posloupnost rubů a líců a její stav v každém okamžiku si můžeme znázornit jako hru, v níž se figurka pohybuje po hracím plátnu na obr. 1. Na začátku hry stojí figurka na políčku s a podle výsledků jednotlivých hodů se přesouvá po hracím plátně tak dlouho, až dorazí buď do bodu $\boxed{rrrrr}$, nebo do bodu $\boxed{ll}$.



Obr. 1 Stochastický graf jako hrací plátno hry

Představme si, že na počátku hry stojí 64 figurek v bodě s a jednotlivé pravděpodobnosti na obr. 1 interpretujeme jako poměr, ve kterém se figurky v daném bodě rozdělí k dalšímu putování ve směru šipek. Zajímá nás, kolik figurek dojde (**bez vracení**) do bodu $\boxed{ll}$ a kolik do bodu $\boxed{rrrrr}$. Z bodu s vyjde 64 figurek a polovina z nich, tj. 32 dorazí do bodu $\boxed{r}$. Druhá polovina (32 figurek) dojde do bodu $\boxed{l}$, viz obr. 2.



Obr. 2 Figurky na grafu hry

Sledujme nejprve „modré“ figurky. Z bodu $\boxed{l}$ polovina figurek (tj. 16) dojde do cíle v bodě $\boxed{ll}$. Druhá polovina (16 figurek) dojde do bodu $\boxed{r}$. Osm z nich dorazí do bodu $\boxed{rr}$ a do každého z následujících bodů dojde vždy polovina figurek, z bodu předešlého. Do cíle v bodě $\boxed{rrrrr}$ dorazí tak jediná figurka.

Podobně postupujeme i v případě „červených“ figurek. Z 32 figurek v bodě $\boxed{r}$ dorazí do cíle v bodě $\boxed{rrrrr}$ dvě figurky. Do bodu $\boxed{l}$ přejde postupně celkem $16+8+4+2=30$ figurek a polovina z nich, tj. 15 figurek dorazí do cíle v bodě $\boxed{ll}$.

Do bodu $\boxed{rrrrr}$ dorazily celkem 3 figurky, do bodu $\boxed{ll}$ dorazilo celkem 31 figurek. Pak

$$p = \frac{3}{31+3} = \frac{3}{34}$$

a tedy $m = 3$ a $n = 34$. Součet $m + n$ je roven 37.

Na mnoha případech jsme si ověřili, že k vytvoření stochastického grafu a určení počtu „putujících figurek“ stačilo studentům 5–7 minut. Uvedenou metodu navíc úspěšně zvládlo široké spektrum studentů, nejenom zájemců o matematiku.

Literatura

[1] *Andreescu, T., Gelca, R.*: Putnam and Beyond. Springer, 2007.

[2] *Tlustý, P., Krech, I.*: Stochastické grafy jako nástroj řešení matematických úloh. MFI, roč. 19, (2010), č. 5, s. 257–260.

[3] *Krech, I., Tlustý, P.*: Stochastické grafy a jejich aplikace. Jihočeská univerzita, České Budějovice 2012.

[4] https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1995_AIME [cit. 25. 3. 2018].