Leonardův dráp a Leonardovo zrcadlo

TEREZA HANUSOVÁ – MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

ZŠ Burešova, Praha – Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Leonardo da Vinci (1452–1519), rodným jménem Leonardo di ser Piero, je znám především jako výtečný italský malíř (speciálně autor obrazu *Mona Lisa*, zřejmě nejslavnějšího portrétu všech dob). Méně proslulý je jako vynálezce, konstruktér, sochař či hudebník. Byl však rovněž geometrem. Během svého studia kvadratury kruhu, kterou se mu samozřejmě nikdy nepodařilo přesně sestrojit, se zabýval rovinnými obrazci, které jsou ohraničeny křivkami (jeho pozornost upoutaly např. Hippokratovy měsíčky). Výsledky bádání lze objevit v jeho rukopisech [1] a [2]. Pro zajímavost uveďme, že psal levou rukou zprava doleva.

V článku jsou představeny dva rovinné útvary, které zavedl a jsou po něm pojmenovány, a to tzv. *Leonardův dráp* a *Leonardovo zrcadlo*. Uvedeny jsou také věty o kvadratuře Leonardova drápu, resp. poloviny Leonardova zrcadla.

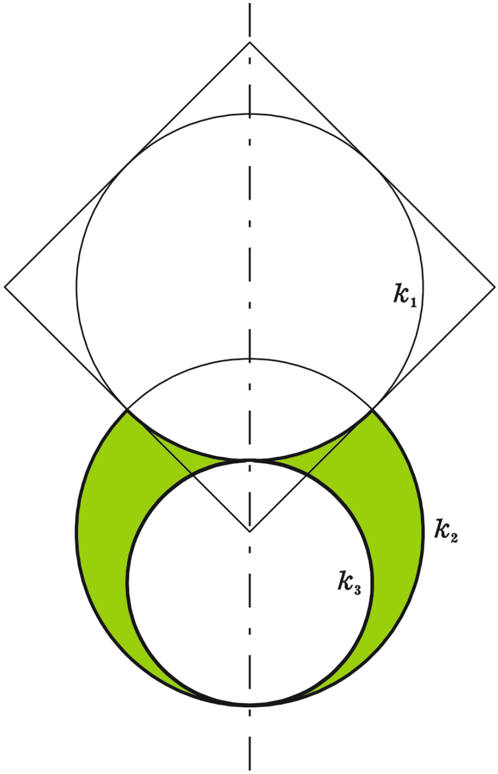
Leonardův dráp

Definice 1

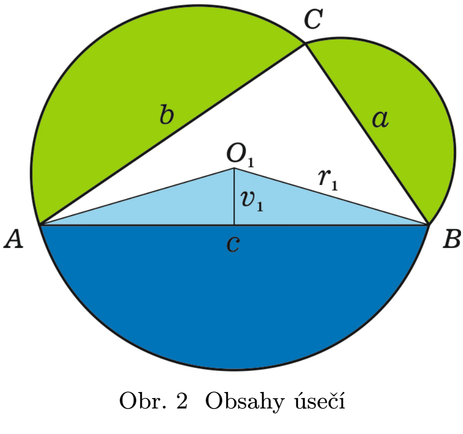
Uvažujme čtverec, kružnici k_1 tomuto čtverci vepsanou, kružnici k_2 se středem v jednom z vrcholů čtverce a poloměrem totožným s poloměrem kružnice k_1 a kružnici k_3, která má vnější dotyk s kružnicí k_1, resp. vnitřní dotyk s kružnicí k_2, přičemž středy všech třech uvedených kružnic leží v jedné přímce (obr. 1). Označíme-li kruhy ohraničené kružnicemi k_1, k_2 a k_3 po řadě K_1, K_2 a K_3, potom útvar $\mathcal{D} = K_2 \setminus (K_1 \cup K_3)$ nazýváme *Leonardův dráp*.

Označení $k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_3$ z definice Leonardova drápu budeme pro příslušné kružnice a kruhy používat i v dalších částech textu, aniž bychom symboliku znovu zaváděli.

Odvoďme nyní vztah mezi obsahy jistých kruhových úsečí, který použijeme k důkazu níže uvedené věty o obsahu Leonardova drápu.



Obr. 1 Leonardův dráp



Obr. 2 Obsahy úsečí

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c a odvěsnami a, b a dále kruhové úseče, které jsou sestrojené nad jeho stranami a které jsou navzájem podobné (obr. 2). Označme O_1 střed, resp. r_1 poloměr, kružnicového oblouku, který ohraničuje úseč sestrojenou nad přeponou c, a v_1 vzdálenost bodu O_1 od této přepony. Obdobně nechť O_2, r_2, v_2 značí analogické pojmy příslušející úseči sestrojené nad odvěsnou a a konečně O_3, r_3, v_3 analogické pojmy příslušející úseči sestrojené nad odvěsnou b.

Jelikož víme, že jsou úseče podobné, je

$$\frac{a}{c} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{v_2}{v_1} = k, \qquad \frac{b}{c} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{v_3}{v_1} = m, \tag{1}$$

kde k a m jsou kladná reálná čísla. Protože $c^2 = a^2+b^2$, plyne ze vztahů (1) rovnost $c^2 = c^2k^2 + c^2m^2$, a tedy

$$1 = k^2 + m^2. \tag{2}$$

Obsah S_{U_1} úseče sestrojené nad přeponou c je roven rozdílu obsahu S_{V_1} příslušné výseče a obsahu S_{T_1} trojúhelníku ABO_1, tj.

$$S_{U_1} = S_{V_1} - S_{T_1} = \frac{\pi r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{cv_1}{2},$$

kde α je velikost středového úhlu uvažovaného kružnicového oblouku.

Označíme-li obdobně S_{U_2}, S_{V_2}, S_{T_2}, resp. S_{U_3}, S_{V_3}, S_{T_3}, obsahy úseče, výseče a trojúhelníku příslušejících odvěsně a, resp. b, platí

$$S_{U_2} + S_{U_3} = S_{V_2} - S_{T_2} + S_{V_3} - S_{T_3} = \frac{\pi r_2^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{av_2}{2} + \frac{\pi r_3^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{bv_3}{2}.$$

Využitím vztahů (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} S_{U_2} + S_{U_3} &= \frac{\pi k^2 r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{kckv_1}{2} + \frac{\pi m^2 r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{mcmv_1}{2} = \\ &= \frac{\pi r_1^2 \alpha}{360^\circ}\left(k^2 + m^2\right) - \frac{cv_1}{2}\left(k^2 + m^2\right) = \frac{\pi r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{cv_1}{2} = S_{U_1}. \end{aligned}$$

Tím jsme odvodili následující tvrzení.[1)]

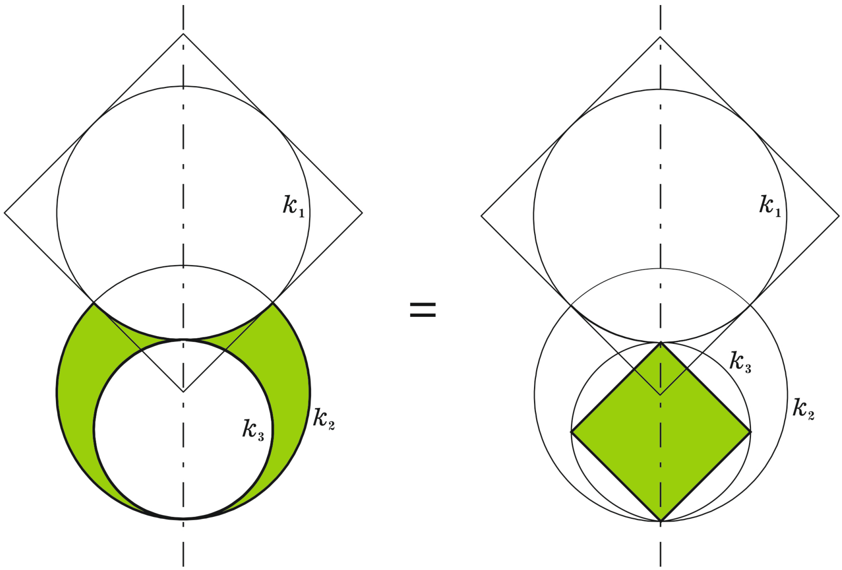
Lemma 1

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník. Sestrojíme-li nad jeho stranami navzájem podobné kruhové úseče, je obsah úseče sestrojené nad přeponou roven součtu obsahů úsečí sestrojených nad odvěsnami.

Nyní můžeme dokázat větu o obsahu Leonardova drápu:

Věta 1

Obsah Leonardova drápu je roven obsahu čtverce, který je vepsán kružnici k_3 (obr. 3).

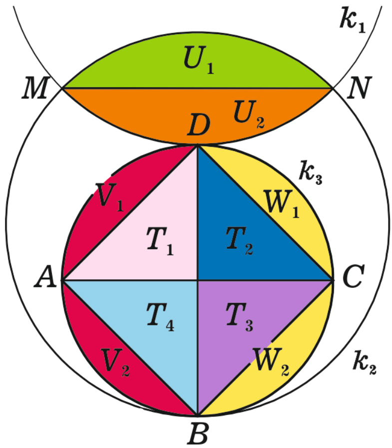


Obr. 3 Obsah Leonardova drápu a čtverce

Důkaz: Do kružnice k_3 vepišme čtverec $ABCD$ tak, aby bod D ležel na kružnici k_1, a tento čtverec rozdělme jeho úhlopříčkami na čtyři části.

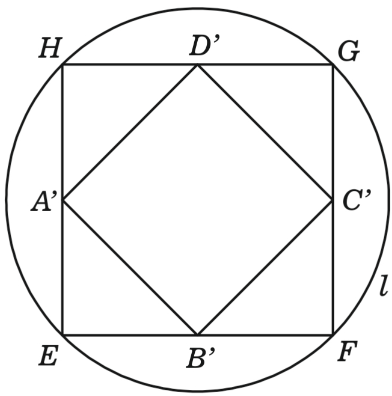
[1)] Raději výslovně upozorněme, že lemma pojednává o kruhových úsečích, nikoliv pouze o polokruzích. Platí dokonce i obecnější tvrzení, které se nejčastěji nazývá Zobecněná Pythagorova věta: *Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník. Sestrojíme-li nad jeho stranami navzájem podobné útvary tak, aby si po dvou odpovídaly v podobnostech, v nichž si odpovídají strany trojúhelníku (koeficienty podobností jsou rovny poměrům délek příslušných dvojic stran trojúhelníku), je obsah útvaru sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů útvarů sestrojených nad odvěsnami.*

Průsečíky kružnic k_1 a k_2 označme M, N a kruhové úseče a trojúhelníky ležící v kruhu K_2 popišme V_1, V_2, W_1, W_2, U_1, U_2, T_1, T_2, T_3, T_4 podle obr. 4.



Obr. 4 Jednotlivé části kruhu K_2

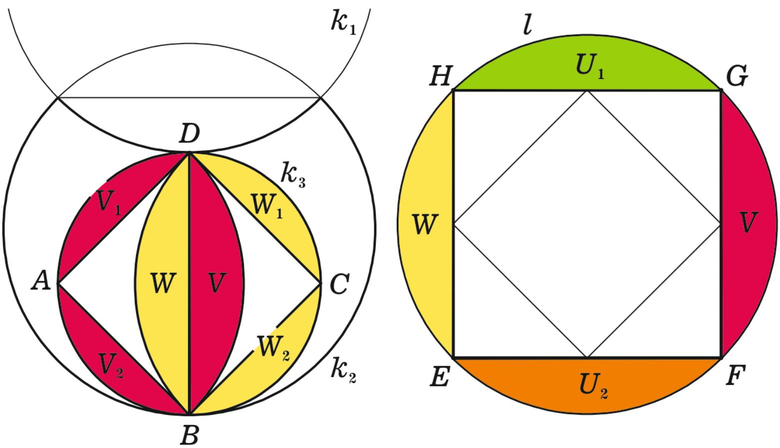
Sestrojme kruh L s hraniční kružnicí l, který je shodný s kruhem K_2, a čtverec $EFGH$, který je vepsán kružnici l (obr. 5).



Obr. 5 Kruh L shodný s kruhem K_2

Délka strany tohoto čtverce je totožná s délkou úsečky MN (dvě strany čtverce z definice Leonardova drápu totiž prochází středem kružnice k_2, a proto jsou jejich části ležící uvnitř kruhu K_2 současně polovinami úhlopříček čtverce vepsaného kružnici k_2). Sestrojme další čtverec $A'B'C'D'$ tak, aby jeho vrcholy byly středy stran čtverce $EFGH$. Délka úhlopříčky tohoto čtverce je totožná nejen s délkou strany čtverce $EFGH$, ale i s délkou úsečky MN. Jelikož $|MN| = |HG| = |EF|$, jsou kruhové úseče U_1 a U_2 shodné s úsečemi vytknutými stranami čtverce $EFGH$ z kruhu L. Proto platí také $|BD| = |B'D'|$, z čehož plyne, že čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou shodné.

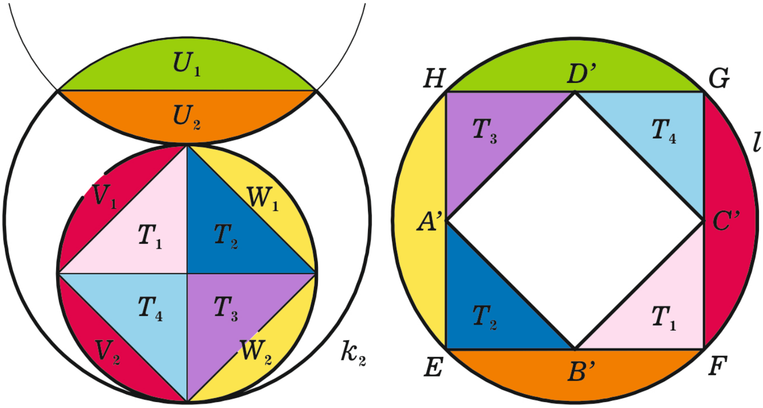
Součet obsahů úsečí V_1 a V_2, které přináležejí odvěsnám pravoúhlého trojúhelníku ABD, je podle lemmatu 1 totožný s obsahem jim podobné úseče V sestrojené nad přeponou uvažovaného trojúhelníku (obr. 6 vlevo). Uvedený součet je však roven také obsahu úseče vytknuté stranou GF v kruhu L (obr. 6 vpravo), neboť tato úseč je s úsečí V shodná. Obdobně lze odůvodnit, že součet obsahů úsečí W_1, W_2 roven obsahu úseče W, která je současně úsečí kruhu L (obr. 6).



Obr. 6 Shodnost obsahů úsečí

Z výše uvedeného je zřejmé, že trojúhelníky T_1, T_2, T_3, T_4 a $FC'B'$, $EB'A'$, $HA'D'$, $GD'C'$ jsou shodné (obr. 7).

Shodné kruhy K_2 a L mají stejný obsah. Protože také části shodných kruhů K_2 a L, které jsou na obr. 7 obarvené, mají stejný obsah, musí mít stejný obsah rovněž části neobarvené. Těmito útvary jsou však Leonardův dráp, resp. čtverec $A'B'C'D'$. Odtud a ze shodnosti čtverců $A'B'C'D'$, $ABCD$ plyne platnost věty.



Obr. 7 Přemístění trojúhelníků T_1, T_2, T_3, T_4

Leonardovo zrcadlo

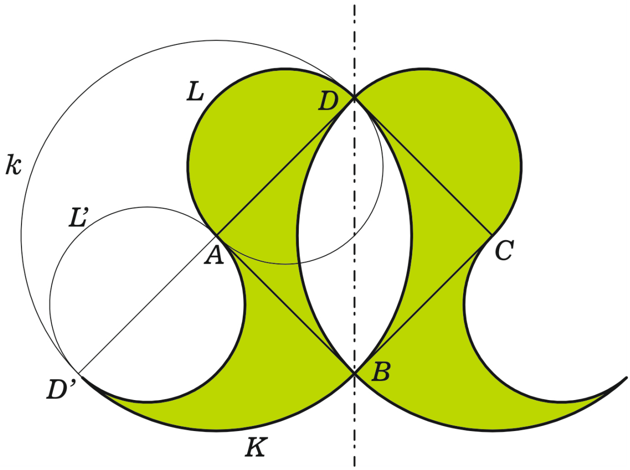
Definice 2

Uvažujme čtverec $ABCD$ a kružnici k o středu A a poloměru $|AB|$. Sestrojme obraz D' vrcholu D ve středové souměrnosti se středem v bodě A, nad průměrem AD, resp. AD', sestrojme kruh L, resp. L', a nad průměrem DD' sestrojme půlkruh K obsahující bod B. Jestliže $M = (K \cup L) \setminus L'$ a M' je obraz útvaru M v osové souměrnosti s osou DB, potom se útvar $\mathcal{Z}_{ABCD} = (M \cup M') \setminus (M \cap M')$ nazývá *Leonardovo zrcadlo* (obr. 8).

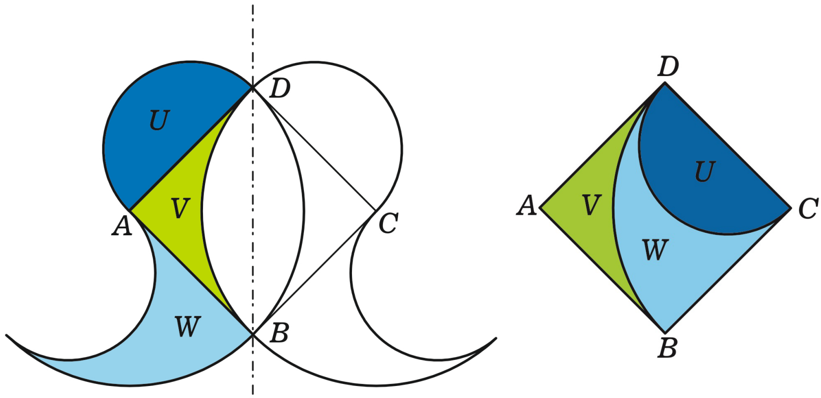
Věta 2

Obsah Leonardova zrcadla $\mathcal{Z}_{ABCD}$ je roven dvojnásobku obsahu čtverce $ABCD$.

Důkaz: Leonardo zrcadlo Z_{ABCD} rozdělme podél jeho jediné osy souměrnosti na dvě poloviny a jednu z těchto polovin rozdělíme dále podél stran čtverce $ABCD$ na tři části U, V, W (obr. 9). Půlkruh U zobrazme v rotaci se středem D a úhlem otočení $90°$ (obrazem jeho průměru AD je strana CD čtverce $ABCD$). Obdobně část W zobrazme v rotaci se středem B a úhlem otočení $270°$ (obrazem úsečky AB je strana CB čtverce $ABCD$). Je zřejmé, že sjednocením útvaru V a obrazů útvarů U a W ve zmíněných rotacích je čtverec $ABCD$. Jeho obsah je tedy roven polovině obsahu Leonardova zrcadla, neboli obsah Leonardova zrcadla Z_{ABCD} je roven dvojnásobku obsahu čtverce $ABCD$.



Obr. 8 Leonardovo zrcadlo



Obr. 9 Obsah Leonardovo zrcadla a čtverce

Literatura

[1] *Leonardo da Vinci*: Codex Atlanticus, rukopis, 1478–1519.

[2] *Leonardo da Vinci*: Codex Madrid I, II, rukopisy, 1490–1505.