Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 245 a 246 můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2018 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 247

Kolik tupoúhlých trojúhelníků má všechny své vrcholy ve vrcholech daného pravidelného 26úhelníku.

Jacek Uryga

Úloha 248

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li (při obvyklém označení délek jeho stran a velikostí vnitřních úhlů) dáno: α, $a + b$, $a + c$.

Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 243 a 244, jejichž zadání najdete ve druhém čísle tohoto (26.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 243

Petr chce na kalkulačce, která umí jen sčítat, odčítat, násobit a dělit, vypočítat $\log_{50} 140$. Jak má postupovat, když zná čísla $a = \log_{20} 40$ a $b = \log_8 35$?

Stanislav Trávníček

Řešení. Z vlastností logaritmické funkce platí

$$a = \log_{20} 40 = \frac{\log_2 40}{\log_2 20} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 5}{\log_2 2^2 + \log_2 5} = \frac{3 + \log_2 5}{2 + \log_2 5}.$$

Jelikož zřejmě $a \neq 1$, plyne odtud

$$\log_2 5 = \frac{3 - 2a}{a - 1}.$$

Podobně z vyjádření

$$b = \log_8 35 = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{3}$$

získáme užitím předcházejícího vztahu

$$\log_2 7 = 3b - \log_2 5 = 3b - \frac{3-2a}{a-1}.$$

Pro hledanou hodnotu výrazu

$$\log_{50} 140 = \frac{2+\log_2 5+\log_2 7}{1+2\log_2 5}$$

dostaneme užitím odvozených vztahů pro $\log_2 5$ a $\log_2 7$

$$\log_{50} 140 = \frac{2+\dfrac{3-2a}{a-1}+3b-\dfrac{3-2a}{a-1}}{1+2\dfrac{3-2a}{a-1}} = \frac{(a-1)(2+3b)}{5-3a}.$$

Hodnotu tohoto výrazu již může Petr vypočítat užitím své kalkulačky.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Wałczak*, LO Tarnowskie Góry.

Úloha 244

Najdete všechny uspořádané dvojice přirozených čísel, jejichž nejmenší společný násobek je o 2 018 větší než jejich největší společný dělitel.

Aleš Kobza

Řešení. Označme d největší společný dělitel hledaných přirozených čísel A a B. Potom existují nesoudělná přirozená čísla a, b tak, že platí $A = da$ a $B = db$. Podle známého vztahu mezi dvěma přirozenými čísly, jejich největším společným dělitelem a nejmenším společným násobkem n je tento roven

$$n = \frac{AB}{d} = dab.$$

Dle zadání platí $dab = n = 2018 + d$, tedy

$$d(ab-1) = 2018 = 2 \cdot 1009.$$

Na předcházejícím řádku je rozklad čísla 2018 na součin prvočísel, proto je jeho (přirozený) dělitel d z množiny $\{1, 2, 1009, 2018\}$. Všechny čtyři možnosti rozebereme samostatně.

a) Pro $d = 1$ platí $ab = 2019$. Rozkladem na součin prvočísel dostaneme $2019 = 3 \cdot 673$, existují tak čtyři dvojice nesoudělných čísel

$$(a, b) \in \{(1; 2019), (3; 673), (673; 3), (2019; 1)\}$$

vyhovující dané rovnosti. Jim odpovídají čtyři dvojice

$$(A, B) \in \{(1; 2019), (3; 673), (673; 3), (2019; 1)\}. \tag{1}$$

b) V případě $d = 2$ dostaneme $ab = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$. V tomto případě existuje 8 dvojic nesoudělných čísel

$$\begin{aligned}(a, b) \in \{&(1; 1010), (2; 505), (5; 202), (10; 101),\\ &(101; 10), (202; 5), (505; 2), (1010; 1)\}.\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}(A, B) \in \{&(2; 2020), (4; 1010), (10; 404), (20; 202), (202; 20),\\ &(404; 10), (1010; 4), (2020; 2)\}.\end{aligned} \tag{2}$$

c) Pokud $d = 1009$ platí $ab = 3$. V tomto případě existují dvě vyhovující dvojice nesoudělných čísel

$$(a, b) \in \{(1; 3), (3; 1)\}.$$

Odtud dostáváme

$$(A, B) \in \{(1009; 3027), (3027; 1009)\}. \tag{3}$$

d) Konečně pro $d = 2018$ platí $ab = 2$, tedy

$$(a, b) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$$

a pro hledané dvojice tak v tomto případě platí

$$(A, B) \in \{(2018; 4036), (4036; 2018)\}. \tag{4}$$

Celkem existuje 16 dvojic hledaných čísel, jsou jimi dvojice ze vztahů (1), (2), (3), (4).

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Wałczak*, LO Tarnowskie Góry.

Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek