Keplerovy zákony ve výuce fyziky na gymnáziu

VLADIMÍR ŠTEFL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

V druhé polovině 16. století shromáždil dánský astronom *Tycho Brahe* (1546–1601) rozsáhlé pozorovací údaje planet, zejména Marsu. Německý astronom *Johann Kepler* (1571–1630) si v době svého pobytu v Praze (1600–1612) vytkl za cíl, stanovit z nich dráhu planety, vyjádřit hledanou křivku matematicky a odhalit příčinné zákonitosti pohybu. Výsledky svého bádání shrnul do pětidílného spisu *Astronomia nova* česky *Nová astronomie* [1, 2], které vyšlo v Heidelbergu roku 1609. Plným názvem byl spis nazván *Astronomia nova seu Physica cœlestis, tradita commentariis De motibus stellæ Martis, ex observationibus G. V. Tychonis Brahe…* česky *Nová astronomie, aneb nebeská fyzika, podávaná v komentářích o pohybu hvězdy [planety] Marsu, kterou na základě pozorování urozeného pana Tychona Brahe…*

Obr. 1 Johann Kepler (1571–1630)

Při zpracování výše zmiňovaných pozorování musel Kepler především vyložit nerovnoměrný pohyb Marsu, rozdílnost délek opsaných oblouků ve stejných časových intervalech. Autor se neomezoval na pouhé fitování pozorovacích údajů planety a vytvoření odpovídajícího matematického vyjádření její dráhy. Proklamovaný nový přístup spatřoval Kepler ve výkladu nebeských jevů prostřednictvím fyzikálních úvah. Zkoumal příčinu změn rychlosti planety, nalezl její změnu v závislosti na vzdálenosti od Slunce. Z toho usoudil, že hybná síla pohybující planetami musí z něj vycházet. Proto začal vztahovat pohyb Marsu ke skutečnému fyzickému Slunci, nikoliv ke střednímu jako Tycho Brahe.

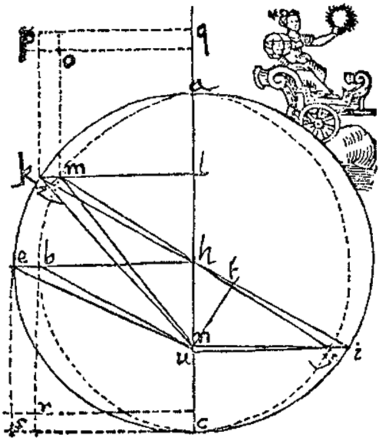
Ve spisu [1] nalezneme historicky původní formulace obou prvních Keplerových zákonů. Byly odlišné od těch, které známe ze současných středoškolských či vysokoškolských učebnic. Pravidla pro pohyb planet, autor pojem zákony neužíval, byla vyslovována v úryvcích textu různých kapitol. Výraznější podpoření geometrickými úvahami a odvozeními se vyskytovalo především v závěrečných kapitolách spisu [1].

K pochopení přínosu Keplerovy teorie pohybu planet je účelné připomenout astronomicko-historické okolnosti. Při svém postupu autor nejprve analyzoval dosud existující modely planetárních pohybů, antický geocentrický pocházející od *Klaudia Ptolemaia* (90–165), novější heliocentrický od *Mikuláše Koperníka* (1473–1543) a poslední geoheliocentrický Tychona Brahe. Všechny umožňovaly předpovídat polohy planet. Nebyly však v úplném souladu s novými přesnými pozorováními. Ukázané rozpory tak vyžadovaly novou interpretaci pozorování a tvorbu odpovídající teorie. Proto Kepler zkoumal různé tvary drah – kruhové, vejcovité, oválovité, eliptické. Jejich ověřování bylo doprovázeno značným množstvím matematických výpočtů, velmi pracných, neboť v době vzniku [1] ještě nepoužíval logaritmy. Závěrečné eliptické řešení doplnil fyzikálními hypotézami, zdůvodňujícími libraci průvodiče Slunce–Mars, tzv. rádiusu. Pohyb planety vysvětloval jako součet dvou pohybů, rovnoměrného po kruhové dráze kolem Slunce a libračního podél rádiusu.

Jaký byl chronologický postup Keplerových myšlenek? Protože pohyb Marsu byl pozorován z pohybující se Země, musel proto nejprve upřesnit její dráhu. Koncem roku 1601 důvtipnou triangulační metodou, s využitím opozic Marsu nalezl, že je téměř shodná s kružnicí, přičemž Slunce je posunuto mimo střed. Tehdejší přesnost astronomických pozorování nedovolovala odhalit nekruhový tvar. Eliptičnost se však projevila v uvedeném posunu polohy Slunce a v nerovnoměrnosti pohybu. Právě ta byla zásadní, neboť v Koperníkově přístupu vycházejícím z epicyklů a deferentů se Země měla pohybovat rovnoměrně. Kepler však prokázal, že pohyb planet je nerovnoměrný. Příkladně u Marsu výpočty zjistil, že v perihéliu při větší rychlosti opsal za dva časové měsíce úhel 37°, zatímco při menší v aféliu pouze 25,8°. Zobecněním takových úvah dospěl k pravidlu ploch, později nazvaném *II. Keplerův zákon.* V prosinci 1601 [3] psal svému učiteli *M. Mästlinovi* (1550–1631) „…úseky, které planeta urazí na své dráze, jsou nepřímo úměrné vzdálenosti od Slunce, v níž právě planeta je…“. Do [1] později zařadil dvě různé formulace tohoto zákona. První: „Rychlost planety je nepřímo úměrná vzdálenosti od Slunce,“ což však platí pouze v blízkosti afélia či perihélia planety. Vyjádření v současné gymnaziální učebnici [4] je bližší znění druhé: „Rychlost planety se mění tak, že úsečka spojující Slunce a planetu opisuje za stejný čas stejné plochy.“

Po upřesnění geometrického tvaru dráhy Země přistoupil Kepler k obtížnějšímu problému – řešení téhož u Marsu. Zvolil si jej promyšleně, neboť byl vhodný k častějšímu pozorování a měl, s výjimkou obtížněji sledovatelného Merkuru, největší výstřednost. Vytvořil soupis časových okamžiků, délek a šířek pro opozice Marsu v letech 1580–1600 (1580, 1582, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1600), tedy původně celkem 10 poloh [1]. V matematické interpretaci údajů se zpočátku snažil použít Koperníkův heliocentrický model. Dosáhl souladu výpočtů s pozorováními do 8’. Kepler však byl přesvědčen, že Tycho Brahe se nedopustil tak velkých nepřesností svých pozorování (pozdější analýza prokázala jejich přesnost na úrovni zhruba 2’). Dospěl k závěru, že volba není správná, protože neodpovídala pozorovacím údajům. Propočítal polohu Marsu v různých časových datech a matematickou analýzou odhalil, že proložená křivka není kružnice, nýbrž je protažena podél přímky spojující afélium a perihélium. Jak jsme již konstatovali, z počátku Kepler prověřoval tvary vejcovité a později oválovité. Ještě v roce 1604 [5] psal frískému astronomovi Davidu Fabriciovi (1564–1617): „Kdyby dráha Marsu měla být dokonalou elipsou, již dávno by tuto úlohu vysvětlil Archimédes a Apollónios.“ Na jaře roku 1605 však dospěl k závěru, že dráha Marsu je eliptická. Téhož roku na podzim v dopise Fabriciovi [5] uvedl: „Nejpravděpodobnější dráhou planet je elipsa.“ Tento poznatek, později doplněný o umístění Slunce v ohnisku, se dnes nazývá *I. Keplerův zákon.* Na obr. 2 je elipsa z [1].

S pojmem dráha je těsně spojena problematika interpretace latinských termínů *orbes* a *orbita* používaných v Keplerových spisech. Jejich význam se u autora v průběhu života vyvíjel orbes → orbita, od sfér (materiálních objektů), přes sféry chápané geometricky, až po myšlenou křivku (geometrický pojem), dávanou do kontextu s fyzikálním pozadím, jak lze sledovat v časové posloupnosti vydání spisů *Mysterium cosmographicum* (česky Tajemství vesmíru) [6] → *Astronomia nova* (Nová astronomie) [1] → *Epitome astronomiæ Copernicanæ* (Souhrn koperníkovské astronomie) [7].



Obr. 2 Keplerova elipsa ve spisu Astronomia nova

Keplerův úspěšný postup byl podmíněn matematickými metodami přibližných výpočtů [1], jejichž pomocí se mu podařilo efektivně vyřešit problém zpracování rozsáhlého pozorovacího materiálu. Příkladně zkoumal problematiku délky oblouku eliptické dráhy, včetně celé elipsy. K tomu v [1] uvedl: „Délka celé elipsy je velmi blízká k aritmetickému průměru délky kružnice o poloměru rovném velikosti velké poloosy elipsy a kružnice o poloměru rovném malé ose elipsy." Pravidlo využil k nalezení délek eliptických planetárních drah.

Pro obvod elipsy Kepler používal vztah $o = \pi(a + b)$ podle myšlenkové analogie, že její plocha πab je vytvářena z plochy kruhu πa^2. Dosadíme číselné hodnoty Marsu $a_\mathrm{M} = 2{,}279\,37 \cdot 10^{11}$ m a $b_\mathrm{M} = 2{,}269\,40 \cdot 10^{11}$ m do vztahu

$$o \ = \pi(a_\mathrm{M} + b_\mathrm{M}) = 1{,}428\,996 \cdot 10^{12} \text{ m}.$$

V nyní používané aproximaci [8] je

$$o \ = \pi \left[1{,}5(a_\mathrm{M} + b_\mathrm{M}) - \sqrt{a_\mathrm{M} b_\mathrm{M}}\right] = 1{,}428\,998 \cdot 10^{12} \text{ m}.$$

Výpočet délky eliptické dráhy Marsu podle Keplera má relativní chybu 0,000 1 %, vztah je plně vhodný.

Jak bylo připomínáno, nezbytnou součástí autorových úvah byly fyzikální hypotézy, které měly potvrzovat správnost zvoleného eliptického tvaru. Kepler vycházel z myšlenek W. Gilberta (1544–1603) [9], předpokládajících magnetickou interakci Slunce a planety. Magnetické přitahování a odpuzování podle autora vyvolávalo dříve uvedenou libraci planety podél rádiusu. Samotný pojem librace převzal Kepler z mechaniky, kde byl používán u vyvažování páky – libro. V souladu s tehdejšími představami se předpokládalo, že přirozené příčiny lze zachytit jako předměty na páce, řídící se zákonem rovnováhy na ní.

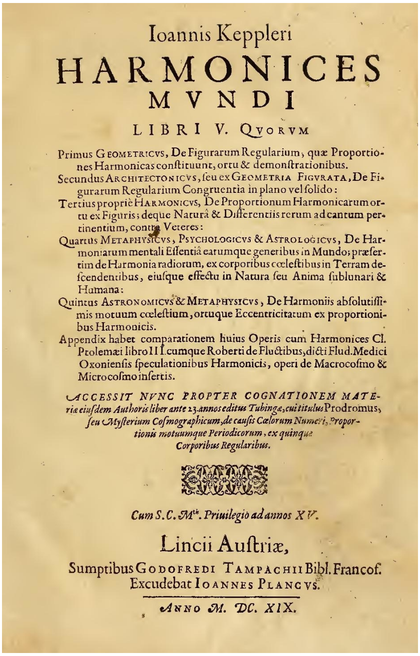
I v dalším období po roce 1609 se Kepler nepřestal zabývat problematikou pohybu planet, hledal vztah mezi vzdálenostmi planet od Slunce a dobami jejich oběhů. Výpočty zjistil, že s rostoucí vzdáleností se oběžné doby planet zvětšují rychleji než poloměry drah, tedy se zmenšuje rychlost jejich pohybu. V roce 1618 objevil tzv. *harmonický*, dnes nazývaný *III. Keplerův zákon*, vyjadřující závislost mezi velikostmi velkých poloos a oběžnými dobami planet. Objev zákona komentoval Kepler v [10] takto:

8. března tohoto roku 1618, přeje-li si někdo přesný údaj času, se tento poměr vynořil v mé mysli. Neměl jsem však štěstí, když jsem jej ověřoval výpočtem, takže jsem jej zavrhl jako chybný. Konečně se však dne 15. května opět vrátil a v novém náporu přemohl temnoty mého ducha. Vyplynul přitom tak dokonalý souhlas mezi mou sedmnáctiletou prací nad Brahovými pozorováními a mou současnou úvahou, že jsem se zprvu domníval, že jsem snil a že jsem hledaný vztah vložil do výchozích předpokladů. Ale je to věc zcela jasná a zcela přesná – poměr, který je mezi oběžnými dobami kterýchkoliv dvou planet, je přesně půl druha násobkem poměru středních vzdáleností, tedy samotných drah; ovšem je přitom třeba dbát na to, že aritmetický průměr obou diametrů eliptické dráhy je poněkud menší než diameter. . .

Půl druha násobkem poměru v latinské matematické mluvě 17. století znamená, že prvé veličiny, tj. oběžné doby, bylo třeba brát v druhé mocnině a další veličiny – střední vzdálenosti v mocnině třetí.

III. Keplerův zákon byl uveřejněn v díle *Harmonices mundi libri V.*, česky *Harmonie světa pět knih*, které vyšlo v Linci roku 1619–1621 [10] (na obr. 3 je titulní list).

Doplnění a zobecnění zákonů pro ostatní tehdy známé planety provedl autor až v letech 1618–1621 v [7]. Po větším časovém odstupu vytvořil mnohem propracovanější a systematičtější výklad, včetně řady doplnění: umístění Slunce do ohniska elipsy, rozšíření platnosti prvních dvou Keplerových zákonů na všechny známé planety, matematicky vhodnější řešení Keplerovy rovnice atd. Obsah [7] je veden formou otázek a odpovědí. Jde o první ucelenou učebnici nové astronomie vycházející z heliocentrické teorie.



Ioannis Keppleri

HARMONICES
MVNDI

LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.

Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:

Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:

Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:

Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.

Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

ACCESSIT NVNC PROPTER COGNATIONEM MATERIÆ eiusdem Authoris liber ante 23. annos editus Tubingæ, cui titulus Prodromus, *seu Mysterium Cosmographicum, de causis Cælorum Numeri, Proportionis motuumque Periodicorum, ex quinque Corporibus Regularibus.*

Cum S. C. Mtis. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Austriæ,

Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

Obr. 3 Titulní list Harmonie světa

Objev Keplerových zákonů představoval důležitý krok v poznávání sluneční soustavy. Teprve až znalost zákona všeobecné gravitace formulovaného ve spisu *Isaaca Newtona* (1643–1727) *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* česky *Matematické principy přírodní filozofie* [11] umožnila hlubší studium fyzikální podstaty pohybu planet kolem Slunce a zodpovězení otázky způsobu jejich pohybu. Planety tvoří společně s centrálním tělesem Sluncem gravitačně vázanou soustavu, která je možná pouze při záporné velikosti vazebné energie, tj. záporné sumě kinetické a potenciální energie. Typ tvaru dráhy, po které se těleso pohybuje v poli centrálních sil, je určován jeho kinetickou energií. II. Keplerův zákon ploch je vyjádření obecnějšího zákona zachování momentu hybnosti. Z něj výklad Keplerových zákonů je zachycen příkladně v [12].

Newtonovo zobecnění Keplerových zákonů v *Principiích* [11] se stalo impulsem pro rozvoj astronomie. Byly upřesněny vzdálenosti ve sluneční soustavě a zejména III. Keplerův zákon v přesném tvaru otevřel novou metodu pozorováním ze Země určovat hmotnosti nebeských těles, planet, Slunce, hvězd či později černých děr v dvojhvězdách či v jádrech galaxií. Astronomická pozorování stanovují relativně přesně úhlové a lineární veličiny, velikosti velkých poloos drah a, což společně s velmi přesně stanoveným časem, velikostí oběžné doby T, dává možnost využít vztah

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_1 + M_2)$$

pro zjištění hmotnosti, základní charakteristiky kosmických těles, jak bylo demonstrováno v [13].

Jedním z posledních témat, která ještě ve výuce fyziky na gymnáziích z astronomie zůstala, jsou Keplerovy zákony. Mají nejen historický obsah ale i vzdělávací potenciál, jehož využití bylo diskutováno v [14]. Otázky, které si počátkem 17. století položil Kepler, napadají i dnes přemýšlivé žáky: Pohybují se všechny planety stejnou rychlostí? Po jakých dráhách? Existuje vztah mezi vzdáleností planet od Slunce a dobou jejich oběhu? Hledání odpovědí na ně je pro žáky zajímavé. Matematické řešení problematiky se opírá o prostorovou představivost a znalosti z geometrie. Stejně jako Kepler se i žáci při tom mohou naučit pracovat s vlastnostmi elipsy. Například převést známou středovou rovnici elipsy do tvaru polárního ohniskového, tj. s počátkem v ohnisku. V pravoúhlé soustavě souřadnic je středový tvar rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

kde a je délka hlavní poloosy a b je délka vedlejší poloosy, ohnisková vzdálenost $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Pro popis pohybu planet však v historii astronomové používali rovnici elipsy vyjádřenou v polárních souřadnicích (r, φ), kde střed soustavy souřadnic Slunce klademe do hlavního ohniska elipsy a polární úhel φ se počítá od bližšího vrcholu; $x = e + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Polární ohnisková rovnice má tvar

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{2}$$

kde r je délka rádiusu,

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2), \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Číselná (numerická) výstřednost elipsy je ε. Pomocí vztahu $a^2 = a^2\varepsilon^2 + b^2$ obdržíme další z používaných tvarů

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \tag{3}$$

který je zpravidla používán až ve vysokoškolské matematice. Ekvivalentnost tvarů (1) a (2) dokážeme dosazením za x, y, a, b do (1), kdy po algebraických úpravách obdržíme identitu.

Pro procvičení znalostí spojených s Keplerovými zákony lze využít následující úlohy:

Úloha 1

Určete velikost plošné rychlosti Země a Marsu.
$a_\mathrm{Z} = 1{,}495\,98 \cdot 10^{11}$ m, $a_\mathrm{M} = 2{,}279\,37 \cdot 10^{11}$ m, $\varepsilon_\mathrm{Z} = 0{,}016\,71$, $\varepsilon_\mathrm{M} = 0{,}093\,41$, $T_\mathrm{Z} = 1$ rok $= 3{,}155\,692\,6 \cdot 10^7$ s, $T_\mathrm{M} = 1{,}880\,711$ roku.

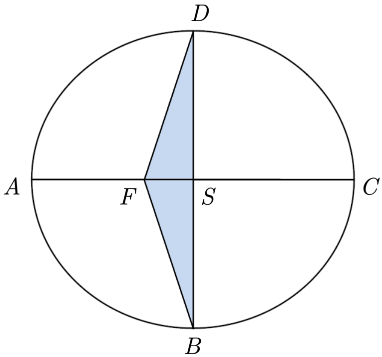
Řešení. Dosadíme do vztahu

$$b = \sqrt{a^2(1-\varepsilon^2)},$$

obdržíme $b_\mathrm{Z} = 1{,}495\,77 \cdot 10^{11}$ m, $b_\mathrm{M} = 2{,}269\,40 \cdot 10^{11}$ m; $v_\mathrm{plZ} = \frac{\pi a_\mathrm{Z} b_\mathrm{Z}}{T_\mathrm{Z}} = 2{,}23 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $v_\mathrm{plM} = \frac{\pi a_\mathrm{M} b_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M}} = 2{,}73 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Úloha 2

Najděte poměr časů, které Mars potřebuje pro přechod úseku eliptické dráhy ohraničené malou poloosou elipsy o výstřednosti $\varepsilon_\mathrm{M} = 0{,}093\,41$ (obr. 4).



Obr. 4 Eliptická dráha Marsu

Řešení. Nechť t_1 je doba průchodu planety po úseku eliptické dráhy DAB s perihéliem v A, t_2 po úseku BCD s aféliem v C. Podle II. Keplerova zákona platí

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{S_2}{S_1},$$

kde

$$S_1 = \frac{\pi ab}{2} - S_{\triangle FBD}, \quad S_2 = \frac{\pi ab}{2} + S_{\triangle FBD}, \quad \frac{1}{2}|BD| \cdot |FO| = abe.$$

Dosazením získáme

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{1}{2}ad(\pi + 2\varepsilon)}{\frac{1}{2}ad(\pi - 2\varepsilon)} = \frac{\pi + 2\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon} = 1{,}126\,44,$$

tedy $t_2 > t_1$. V úseku s aféliem se Mars pohybuje delší dobu.

Úloha 3

Určete procentuální změnu vzdálenosti Marsu od Slunce v perihéliu a aféliu, za jednotku vzdálenosti zvolme astronomickou jednotku au, při $a = 1{,}523\,7$ au, $\varepsilon = 0{,}093\,41$.

Řešení. Použijeme vztah (3) pro rádius r. V periheliu při $\varphi = 0°$ je

$$r_\mathrm{p} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} = 1{,}381\,4 \text{ au},$$

v aféliu při $\varphi = 180°$ je

$$r_\mathrm{a} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} = 1{,}666\,0 \text{ au},$$

Výpočet procent budeme vztahovat k hodnotě velké poloosy, tudíž

$$\frac{0{,}284\,6}{0{,}015\,226\,7}\,\% = 19\,\%.$$

Úloha 4

Odhadněte hmotnost černé díry v jádře Galaxie, jestliže oběžná doba hvězdy S0-2 obíhající ve vzdálenosti $r = 965{,}8$ au od jádra Galaxie činí $T = 15{,}2$ roků, viz [15].

Řešení. Hmotnost černé díry určíme z upraveného tvaru III. Keplerova zákona

$$M \doteq \frac{r^3}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \doteq 3{,}9\cdot 10^6\, M_{\mathrm{S}}.$$

Volbou počátku souřadnicové soustavy do skutečného fyzického Slunce, ke kterému propočítával pozorovací údaje Marsu, dokončil Kepler heliocentrický Koperníkův model. Potvrdil jeho správnost a podstatně ho zjednodušil. Nahradil dřívější složitá schémata založená na kombinaci rovnoměrných kruhových pohybů po deferentech a epicyklech. Při eliptických oběžných drahách a heliocentrickém uspořádání autor vyložil všechny zákonitosti v pozorovaném pohybu planet podél ekliptiky. Nalezené zákony završily kinematický obraz pohybu planet. Jejich objevitel má své nezastupitelné místo v posloupnosti výjimečných historických osobností Koperník – Kepler – Newton.

Literatura

[1] *Kepler, J.*: Astronomia Nova ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G. V. Tychonis Brahe. Heidelberg, 1609.

[2] *Kepler, J.*: Gesammelte Werke. Band III. Astronomia Nova. C. H. Beck'che Verlagsbuchhandlung, München, 1951.

[3] *Kepler, J.*: Gesammelte Werke. Band XIV Briefe 1599–1603. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1951.

[4] *Svoboda, E., Bednařík, M., Široká, M.*: Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Prometheus, Praha, 2012.

[5] *Kepler, J.*: Gesammelte Werke. Band XV Briefe 1604–1607. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1951.

[6] *Kepler, J.*: Mysterium cosmographicum. Georgius Gruppenbachius, Tübingen, 1596.

[7] *Kepler, J.*: Epitome astronomiæ Copernicanæ Lentijs ad Danubium, excudebat Johannes Plancus 1618–1621.

[8] *Rektorys, K. a kol.*: Přehled užité matematiky. Prometheus, Praha, 2007.

[9] *Gilbert, W.*: De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete Tellure physiologia nova. Book III, kap. 7. Petrus Short, Londini 1600.

[10] *Kepler, J.*: Harmonice mundi. Libri V. Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebar Ioannes Plancus, Lincii Austriæ 1619.

[11] *Newton, I.*: Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Londini 1687.

[12] *Noll, E. D.*: Teaching Kepler's law as more than empirical statements. Physics Education, roč. 37 (2002), č. 3, s. 245–250.

[13] *Štefl, V.*: Třetí Keplerův zákon. Matematika a fyzika ve škole, roč. 7 (1977), č. 6, s. 450–453.

[14] *Štefl, V., Domański, J.*: Prawa Keplera w nauczaniu fizyki. Fizyka w Szkole, roč. 55 (2009), č. 3, s. 37–40.

[15] *Ghez, A. M., et al.*: Full Three Dimensional Orbits For Multiple Stars on Close Approaches to the Central Supermassive Black Hole. Astronomische Nachrichten, roč. 324 (2003), Supplement 1, s. 527–533.

Obecné řešení Buquoyovy úlohy

ČENĚK KODEJŠKA – JAN ŘÍHA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod

Tato práce navazuje na předchozí experimentální ověření teoretického řešení úlohy o kmitavém pohybu jednorozměrného otevřeného systému s proměnnou hmotností [1]. Teoretické řešení Buquoyovy úlohy pro případ nehmotné tažné síly je v [2].

Původní teorie byla rozšířena o další dva parametry, které ovlivňují pohyb balónku naplněného heliem se zavěšeným ohebným vláknem s proměnnou hmotností (viz [1, obr. 1]).

Obecné řešení

Pro nalezení shody mezi teoretickým modelem a experimentálně naměřenými hodnotami musíme vzít v úvahu další dva faktory. Zaprvé odpor prostředí, který zpomaluje pohyb balónku, a za druhé hmotnost tělesa, které táhne vlákno. V našem případě se jedná tedy o hmotnost balónku m_b. Teoretický model, který je uveden v [2], uvažuje pouze nehmotnou tahovou sílu, ale v reálném experimentu musíme pak do teoretického modelu zahrnout i výše uvedené dva faktory.